RIKSGÄLDEN
SWEDISH NATIONAL DEBT OFFICE

Fokusrapport

Mars 2017

Beräkning av risken för stora förluster i statens garanti- och utlåningsportfölj

Författare: Kristoffer Ekström

Beräkning av risken för stora förluster i statens garanti- och utlåningsportfölj

Kristoffer Ekström

Mars 2017

Riksgälden publicerar återkommande utredningar eller artiklar i serien "Fokusrapport".

De slutsatser och synpunkter som uttrycks i rapportserien "Fokusrapport" är författarnas egna och ska inte uppfattas som Riksgäldens.

Riksgäldskontoret ORG.NR 202100-2635 | POSTADRESS POSTAL ADDRESS SE-103 74 Stockholm Sweden | BESÖK VISITORS Jakobsbergsgatan 13 | TELEFON TELEPHONE NAT. 08 613 45 00 INT. +46 8 613 45 00 | TELEFAX NAT. 08 21 21 63 INT. +46 8 21 21 63 | INTERNET riksgalden@riksgalden.se www.riksgalden.se

Innehållsförteckning

1 Inledning

Ansvarsfull hantering av garanti- och utlåningsverksamhet bör vila på principer och regelverk som synliggör verksamhetens engagemang och kostnader samt främjar ett sunt risktagande utan inslag av onödigt höga eller svårhanterliga risker.

I denna rapport riktas fokus på det analytiska ramverk som utgör grunden för Riksgäldens beräkning av risken för stora förluster i statens garanti- och utlåningsportfölj. Syftet är att på ett öppet och tydligt sätt förklara de metodval och avvägningar som ligger till grund för de beräkningsresultat som presenteras i den årliga rapporten *Statens garantier och utlåning – en riskanalys*.

I rapporten presenteras ett antal grundläggande definitioner och faktorer som utgör stommen för en portföljbaserad modell. Tonvikt fästs här vid betydelsen av en konkret och ändamålsenlig frågeställning som utgångspunkt för framtagandet av en modell. Därefter presenteras de metodval, antaganden och data som används, utifrån de specifika förutsättningar som återspeglas i statens garanti- och utlåningsportfölj, i Riksgäldens skattning av statens oförväntade förluster.

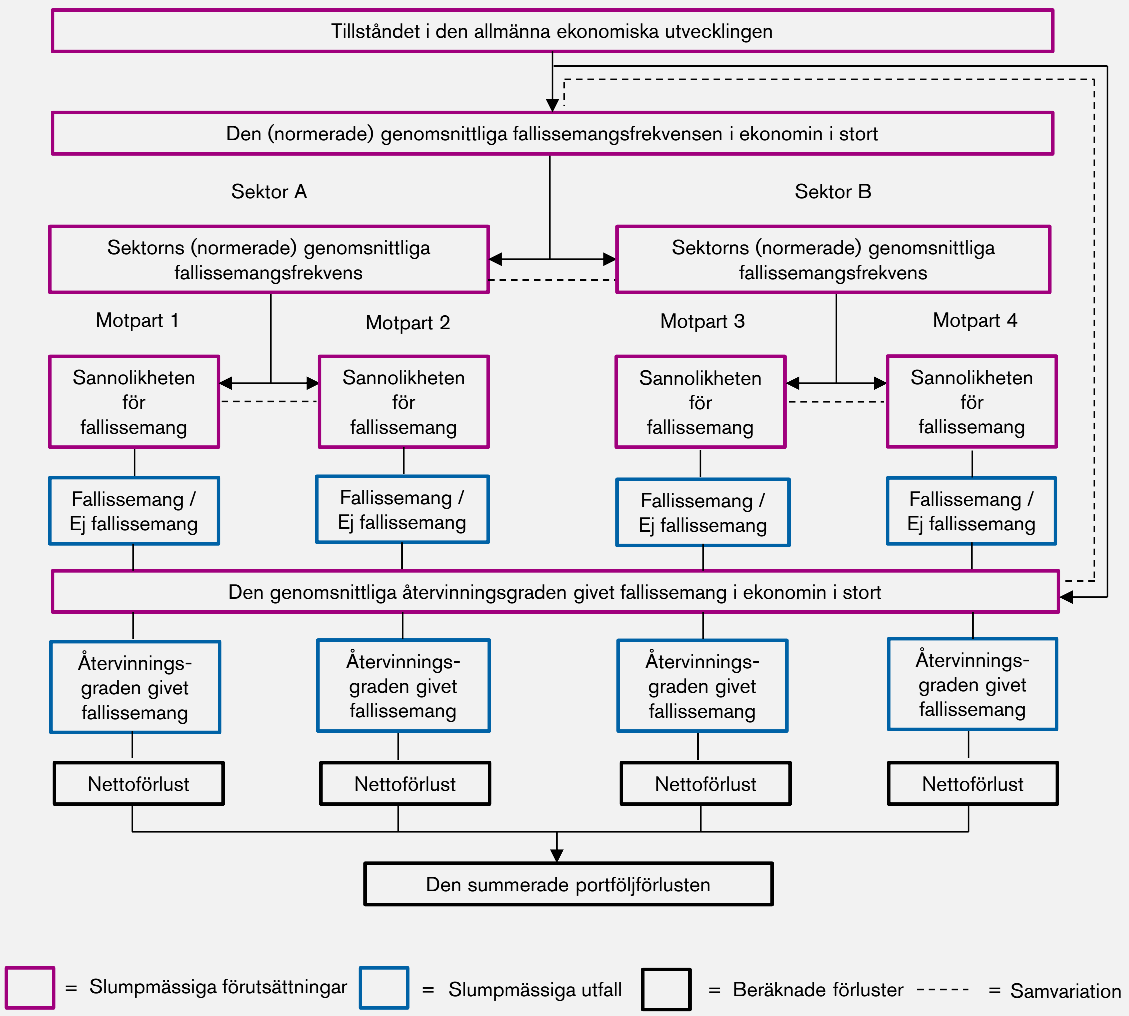
Riksgäldens utvecklingsarbete visar att det är möjligt att utforma en stringent, omfångsrik och ändamålsenlig portföljmodell med tämligen enkla medel. I praktiken med stöd av de rating- och sektorbaserade data som de internationella kreditvärderingsinstituten sammanställer. Kombinationen av en omfångsrik men likväl enkel modell kommer dock inte utan en kostnad, där det med ansatsen följer ett antal begränsningar. Modellen, och de resultat den genererar, ska därför främst ses som en fördjupad beskrivning av risken för stora förluster i statens garanti- och utlåningsportfölj. Resultaten utgör i mindre grad ett mått på risken, även om de åtminstone ger en indikation om storleken på mindre sannolika förluster.[1]

[1] Författaren vill tacka Johan Klass, Ann-Christine Hagelin, Magnus Thor, Mikael Håkansson och Erik Jansson för värdefulla synpunkter och redaktionellt stöd. Eventuella fel är givetvis författarens ansvar.

Illustrativ sammanfattning av portföljmodellen

I figuren nedan illustreras portföljmodellen med hjälp av ett exempel gällande en portfölj med fyra stycken garanti- och låntagare. Portföljen är exponerad mot två olika sektorer, sektor A och B, med två garanti- och låntagare i respektive sektor.

Figur 1 Beräkning av oförväntade förluster i statens garanti- och utlåningsportfölj



2 Beräkningarnas utgångspunkt i fundamental kreditriskanalys

Det är i praktiken ingen mening med att titta på detaljerna i en modell utan en god förståelse för, och ett följdriktigt förhållningssätt till, de grundläggande resonemang och samband som modellen bygger på.

2.1 Begrepp och definitioner

Det finns grundläggande faktorer och etablerade begrepp utgör en metod- och begreppsmässig plattform för kreditriskanalys, både för enskilda engagemang och en portfölj.

Fallissemang

I händelse av att en garanti- eller låntagare inte fullgör sina skyldigheter enligt villkoren för åtagandet inträffar ett så kallat fallissemang (vilket på engelska benämns ”Default” med notationen D). I regel omfattar begreppet fallissemang en mängd olika kredithändelser, allt ifrån en försenad betalning till ett konkursförfarande.

Fallissemang är en binär händelse. Antingen inträffar ett fallissemang eller så inträffar det inte – några andra utfall finns inte.

Exponering

Exponering är den maximala förlust som skulle kunna ske om garanti- eller låntagaren blir föremål för ett fallissemang (detta kallas på engelska ”Exposure at Default” och förkortas EAD). I de flesta fall är exponeringen densamma som garanti- eller lånebeloppet och hanteras som en konstant.

Sannolikhet för fallissemang

Vid tidpunkten för när en garanti eller ett lån utfärdas råder osäkerhet kring om garanti- eller låntagaren kommer att fullgöra sina förpliktelser eller ej. Fallissemang kan därför betraktas som en slumpmässig händelse.

En central del i en kreditriskanalys är därför en framåtblickande bedömning av sannolikheten för att garanti- eller låntagaren blir föremål för ett fallissemang (denna sannolikhet benämns ”Probability of Default” på engelska, som förkortas PD).

Sannolikheten för fallissemang beror på garanti- eller låntagarens kreditvärdighet.[2] Eller med andra ord, garanti- eller låntagarens vilja och förmåga att fullgör sina åtaganden i tid.

Händelsen fallissemang kan formaliseras med hjälp av en indikatorvariabel, D, som tillhör en Bernouillifördelning, $D \sim Ber(p)$, med följande täthetsfunktion.[3]

$$D = \begin{cases} 1 & \text{med sannolikheten } p \\ 0 & \text{med sannolikheten } 1 - p \end{cases} \tag{1}$$

Samband (1) innebär att indikatorvariabeln antar värdet ett (fallissemang) med sannolikheten för fallissemang, p. För utfallet noll (ej fallissemang) gäller i stället sannolikheten för det s.k. komplementet, $1 - p$.

Förlustgrad givet fallissemang

Hur stor förlusten blir givet ett fallissemang beror inte bara på exponeringen, utan även på hur mycket som kan återvinnas av det utbetalda beloppet.

Återvinningen påverkas i hög grad av villkoren för fordran. Det gäller framför allt i vilken mån fordran har förmånsrätt eller ej. Facktermen som används är vilken prioritet en fordran har (till exempel säkerställd, oprioriterad eller efterställd fordran). Ju högre prioritet, desto bättre förmånsrätt och därmed större chans att, helt eller delvis, få igen utbetalda pengar i händelse av ett fallissemang.

Den andel av exponeringen som går förlorad efter hänsyn till återvinningar kallas förlustgraden givet fallissemang (vilket på engelska benämns ”Loss given Default” med notationen LGD). Eftersom det på förhand är osäkert om en återvinning kan göras och hur stor den blir hanteras förlustgraden givet fallissemang som en slumpvariabel.

I matematiska termer kan förlustgraden givet fallissemang uttryckas som komplementet till återvinningsgraden givet fallissemang (”Recovery Rate” på engelska med förkortningen RR) – vilken står för den procentuella andelen av det garanterade eller utlånade beloppet som garanti- eller långivaren återvinner givet ett fallissemang.

$$LGD = 1 - RR \tag{2}$$

2.2 Förlustvariabel

Utifrån de definitioner och antaganden som presenterats kan utfallet för en garanti eller ett lån med kreditfrisk formaliseras med hjälp av en förlustvariabel, L (för ”Loss” på engelska).

---

[2] Till exempel garanti- eller låntagarens rating.

[3] En alternativ notation är $P_D(d) = p^d \times (1-p)^{1-d}$, där $d \in \{0,1\}$.

$$L = EAD \times D \times LGD \quad (3)$$

Motsvarande förlustvariabel för en portfölj med n stycken garantier och lån är summan av de enskilda garantiernas och lånens förlustvariabler.

$$L_{PF} = \sum_{i=1}^{n} L_i \quad (4)$$

2.3 Förlustfördelning

En förlustfördelning är en beskrivning av sannolikheterna för de förluster som kan ske, från ingen förlust alls till att förlora hela exponeringen och alla utfall däremellan. Utifrån förlustfördelningen kan olika statistiska moment beräknas, bland annat för att bestämma olika riskmått.

Förlustfördelningen för en garanti- och utlåningsportfölj kännetecknas av dels att den är koncentrerad kring mindre förluster och sedan är asymmetriskt fördelad (s.k. skevhet), dels att sannolikheten för stora förluster avtar långsamt (s.k. kurtosis). Den senare egenskapen innebär att förlustfördelningen har en ”fet svans”.

2.4 Förväntad förlust

I hanteringen av statens garantier och utlåning med kreditrisk är förväntad förlust ett nyckelbegrepp (”Expected Loss” på engelska med förkortningen EL). Den förväntade förlusten motsvarar *kostnaden* med att utfärda garantier och lån. Eller mer exakt, den genomsnittliga kostnaden om en garanti eller ett lån utfärdas ett oändligt antal gånger.

Den förväntade förlusten utgörs av förlustvariabelns väntevärde, $E(L)$. Utifrån ett förenklat antagande om oberoende mellan indikatorvariabeln, D, och förlustens storlek efter återvinningar, LGD, beräknas den förväntade förlusten som produkten av respektive slumpvariabels väntevärde.

I och med antagandet om att indikatorvariabeln tillhör en Bernouillifördelning kan väntevärdet bestämmas med hjälp av definitionen av ett väntevärde för en diskret slumpvariabel.[4]

$$E(D) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p \quad (5)$$

Eftersom fördelningen för förlustgraden givet fallissemang inte specificerats används notationen $E(LGD)$ som ett generellt uttryck för väntevärdet.

[4] $\sum_x x \times p_x$.

Med kännedom om respektive väntevärde fås ett analytiskt uttryck för den förväntade förlusten för en enskild garanti eller ett enskilt lån.

$$E(L) = EAD \times p \times E(LGD) \tag{6}$$

För en portfölj med garantier och lån beräknas den förväntade förlusten genom att summera de enskilda garantiernas och lånens förväntade förlust.

$$E(L_{PF}) = \sum_{i=1}^{n} E(L_i) = \sum_{i=1}^{n} EAD_i \times p_i \times E(LGD_i) \tag{7}$$

2.5 Oförväntad förlust

En garanti- eller långivare löper risken att kreditförlusten blir större än den förväntade förlusten. En sådan avvikelse från förväntad förlust kallas oförväntad förlust (vilket på engelska benämns ”Unexpected Loss” och förkortas UL). Oförväntad förlust är således ett uttryck för spridning och utgör därmed ett mått på *risken* i garanti- eller långivningen.

Ett enkelt sätt att formalisera spridningen kring en slumpvariabels väntevärde är med hjälp av standardavvikelsen, S.

Vad det gäller indikatorvariabeln beräknas standardavvikelsen på följande vis.

$$S(D) = \sqrt{E(D^2) - \ E(D)^2} = \sqrt{[1^2 \times p + 0^2 \times (1-p)] - p^2} \tag{8}$$

$$= \sqrt{p \times (1-p)}$$

För att i nästa steg beräkna förlustvariabelns standardavvikelse behövs först ett generellt uttryck för standardavvikelsen avseende produkten av två oberoende slumpvariabler (se sidan 59–60 för en härledning).

$$S(X \times Y) = \tag{9}$$

$$\sqrt{S(X)^2 \times S(Y)^2 + S(X)^2 \times E(Y)^2 + \ S(Y)^2 \times E(X)^2}$$

Genom att ersätta X med D och Y med LGD i samband (9) kan sedan förlustvariabelns standardavvikelse bestämmas (där EAD fortsatt hanteras som en konstant).

$$S(L) = EAD \times \sqrt{S(LGD)^2 \times p + E(LGD)^2 \times p(1-p)} \tag{10}$$

Motsvarande beräkning för en portfölj med garantier och lån ges av följande samband.

$$S(L_{PF}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} EAD_i \times EAD_j \times Cov\left(D_i \times LGD_i, D_j \times LGD_j\right)} \tag{11}$$

Noterbart i sambandet är kovariansen, Cov ("Covariance" på engelska), med hänsyn till samvariationer mellan olika garanti- och låntagare i en portfölj. Ju högre kovarians, desto större sannoliket för att det sker flera förluster på en och samma gång i s.k. fallissemangskluster.

2.6 Oförklarad och förklarad spridning

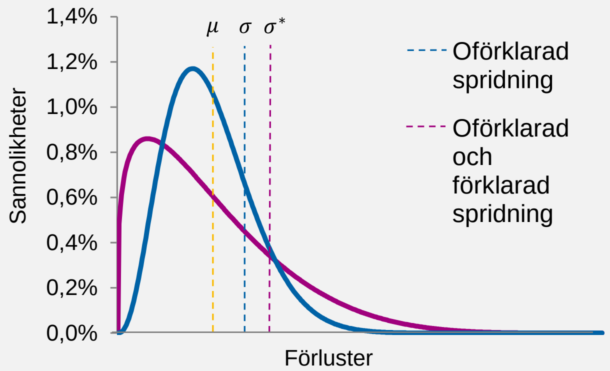
Flera händelser kan ske samtidigt utan att det finns en bakomloggande förklaring till det. Till exempel fallissemangskluster på grund av orsaker som är unika för de enskilda garanti- och låntagarna, men som råkar inträffa samtidigt. Eller med andra ord, att det sker helt slumpmässigt.

Simultana förluster kan även förklaras av bakomliggande fallissemangskorrelationer. Dels *direkta fallissemangskorrelationer* där problem hos en garanti- eller låntagare smittar av sig på andra garanti- eller låntagare, dels *indirekta fallissemangskorrelationer* där flera garanti- och låntagare får problem samtidigt på grund av ogynnsamma förändringar i deras gemensamma ekonomiska miljö.

Exempel på oförklarad och förklarad spridning

Oavsett portfölj finns det alltid en oförklarad spridning i portföljens förlustvariabel. Därutöver finns i regel grund för en förklarad spridning som beror på samvariationer. Den senare innebär en ökad total spridning i portföljen (se figur 2). Hur stor ökningen blir beror på portföljens sammansättning, såsom förekomsten av koncentrationer.

Figur 2 Oförklarad och förklarad spridning



Notera att den förväntade förlusten (μ) är densamma för båda förlustfördelningarna i figuren. Det är endast spridningen kring den förväntade förlusten som skiljer dem åt.

2.7 Fallissemangskorrelationer

Med fallissemangskorrelationer menas att olika garanti- och låntagares kreditvärdighet försämras samtidigt så att de fallerar i kluster.

Fallissemangskorrelationer kan enkelt illustreras genom att hantera förlustgraden givet fallissemang som en konstant, varmed kovariansen i samband (11) endast gäller indikatorvariabeln. Med hjälp av denna förenkling, definitionen av kovariansen samt standardavvikelsen för de enskilda engagemangens förlustvariabel är det möjligt att utveckla samband (11) till ett analytiskt uttryck för standardavvikelsen i portföljens förlustfördelning.[5]

$$S(L_{PF}) = \sqrt{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[EAD_i \times \overline{LGD}_i] \times [EAD_j \times \overline{LGD}_j] \\ \quad \times \left(p_i \times (1-p_i) \times p_j \times (1-p_j)\right)^{\frac{1}{2}} \times \rho_{i,j}\end{array}} \qquad (12)$$

Av sambandet framgår att spridningen kring den förväntade förlusten ökar med storleken på fallissemangskorrelationen, $\rho_{i,j}$, mellan olika garanti- eller låntagare i portföljen. Som tidigare uppmärksammats kan fallissemangskorrelationer förklaras av både direkta och indirekta samband.

Direkta fallissemangskorrelationer

Direkta fallissemangskorrelationer hör ihop med begreppet fallissemangssmitta ("Default contagion" på engelska). Om det föreligger omständigheter där en garanti- eller låntagares finansiella problem smittar av sig på andra garanti- eller låntagare ökar sannolikheten för flera fallissemang på en och samma gång. Möjliga orsaker till direkta fallissemangskorrelationer är affärsmässiga eller juridiska förbindelser som utgör "smittokanaler". Typiska exempel är exponeringar mot garanti- eller låntagare inom samma projekt, leverantörskedja eller företagskoncern.

Indirekta fallissemangskorrelationer

Indirekta fallissemangskorrelationer förklaras av ogynnsamma förändringar i bakgrundsfaktorer som är gemensamma för flera garanti- och låntagare.

Det gäller dels specifika bakgrundsfaktorer som är gemensamma för en del men inte alla garanti- och låntagare i en portfölj. Till exempel om de verkar inom samma bransch och/eller geografiska region – s.k. sektorkoncentrationer. Försämrade förutsättningar i en sektor ger i regel upphov till en negativ effekt för flertalet garanti- och låntagare inom sektorn. Ju fler engagemang i en portfölj som tillhör samma sektor, desto större sannolikhet

---

[5] $Cov(X,Y) = S(X) \times S(Y) \times \rho_{X,Y}$.

för fallissemangskluster i portföljen. En viktig riskminskade faktor är därför diversifiering i en portfölj, där garanti- och låntagarna är utspridda i flera branscher och geografiska regioner.

Sektorkoncentrationer är den viktigaste källan till indirekta fallissemangskorrelationer. Men även i en perfekt diversifierad portfölj föreligger indirekta fallissemangskorrelationer som kan leda till kluster av fallissemang – s.k. systematisk risk. Det beror på förändringar i den allmänna ekonomiska utvecklingen, vilket är en generell faktor som få eller inga garanti- eller låntagare är helt immuna mot. Vid exempelvis en ekonomisk lågkonjunktur brukar det ske fler fallissemang jämfört med ett normalläge.

2.8 Namnkoncentrationer

Namnkoncentrationer förekommer om en portfölj innehåller ett fåtal engagemang (s.k. portföljbaserad namnkoncentration) eller om det finns exponeringar mot enskilda garanti- eller låntagare som är stora i förhållande till portföljens samlade storlek (s.k. individuell namnkoncentration). Förekomsten av namnkoncentrationer i en portfölj innebär att det inte nödvändigtvis krävs fallissemangskorrelationer för att stora förluster ska kunna uppstå. Det kan i stället räcka med ett fåtal slumpmässiga fallissemang.

Ju mer finkornigt sammansatt en garanti- och utlåningsportfölj är, med många engagemang som var och en står för en måttlig del av portföljens storlek, desto lägre är risken för att ett fåtal fallissemang ger upphov till stora porföljförluster.

2.9 Samvariation mellan fallissemang och återvinningsgrad

Det är inte bara antalet fallissemang som i regel ökar i händelse av en nedgång i den allmänna ekonomiska utvecklingen. I samband med en sådan utveckling brukar även återvinningsgraden givet fallissemang minska. I exempelvis en omfattande lågkonjunktur – med en högre frekvens av fallissemang än normalt – finns generellt fler potentiella säljare än köpare av tillgångar. Det pressar ned tillgångspriserna och minskar återvinningsgraden – och ökar därmed förlustgraden givet fallissemang. Detta innebär en (negativ) samvariation mellan garanti- och låntagarnas fallissemangsfrekvens i en portfölj och återvinningsgraden givet fallissemang.

En rättvisande bild av spridningen i en garanti- och utlåningsportfölj innefattar även denna källa till samvariation.

Riskfaktorer som bör undersökas i en garanti- och utlåningsportfölj

Oförväntade förluster i en garanti- och utlåningsportfölj förklaras av olika riskfaktorer som beror på den specifika portföljens sammansättning. I tabell 1 nedan sammanfattas de riskfaktorer som bör undersökas, och efter behov modelleras, för att beräkna oförväntade förluster i en garanti- och utlåningsportfölj.

Tabell 1 Portföljbaserade riskfaktorer

Risken att …	på grund av …	Fackterm
det uppstår ett mindre antal förluster som utgör en betydande andel av portföljen	- att portföljen innehåller ett fåtal engagemang	- Idiosynkratisk risk
	- att portföljen innehåller enskilda garanti- eller låntagare som är stora i förhållande till portföljens samlade storlek	- Idiosynkratisk risk
det uppstår ett flertal förluster samtidigt som tillsammans utgör en betydande del av portföljen	- affärsmässiga eller juridiska förbindelser mellan olika garanti- eller låntagare som utgör ”smittokanaler” där en garanti- eller låntagares problem att fullgöra sina åtaganden smittar av sig på andra garanti- eller låntagare	- Fallissemangssmitta
	- ogynnsamma förändringar i branscher och/eller geografiska regioner som utgör gemensamma förutsättningar för ett flertal garanti- och låntagare i portföljen	- Sektorkoncentrationer
	- ogynnsamma förändringar i den allmänna ekonomiska utvecklingen	- Systematisk risk

3 För en specifik beräkning behövs en precis frågeställning

3.1 Det finns inget självklart riskmått för statens portfölj

Oförväntad förlust är ingen entydigt definierad storhet och kan därför bestämmas på olika sätt. Därmed är det inte självklart vilket riskmått som ska ligga till grund för beräkningen. Det beror i själva verket på frågeställningen. Eller med andra ord, vilken risk som ska beräknas.

Staten har i sammanhanget dock ingen uttalad syn på risk, varken i hanteringen av engagemangen (eftersom staten agerar på marginalen risk-neutral i garanti- och utlåningsverksamheten) eller i uppdraget om den samlade riskanalysen. Det blir därmed upp till Riksgälden att välja den risk som ska beräknas.

Att frågeställningen delvis är öppen innebär ett inslag av godtycklighet, eftersom valet av riskmått påverkar det beräknade resultatet (se figur 3 på sidan 18 för ett illustrativt exempel).

3.2 Fokus på risken för stora förluster

Ett fokus på beräkningar av risken för just stora portföljförluster talar för ett riskmått som tar hänsyn till förlustfördelningens ”svans”. Givet det synsättet bedömer Riksgälden att CVaR är det bäst lämpade riskmåttet för att beräkna oförväntade förluster i statens garanti- och utlåningsportfölj.

Utöver standardavvikelse har Riksgälden även studerat Value-at-Risk (VaR) och villkorlig Value-at-Risk (CVaR, utifrån begreppet ”Conditional Value-at-Risk” på engelska) som kandidater till riskmått.

Standardavvikelse

Standardavvikelsen för en portföljs förlustvariabel är ett enkelt riskmått för att beräkna oförväntade förluster (se samband (12) på sidan 13).

I en analys av risken för stora portföljförluster har dock standardavvikelsen ett begränsat informationsvärde. Den speglar nämligen endast förlustvariabelns andra moment (spridningen) och ger ingen information om det tredje och fjärde momentet, som gäller skevhet och kurtosis. Som tidigare uppmärksammats är de senare momenten betydelsefulla för att beskriva förlustfördelningens ”svans” på ett rättvisande sätt (se figur 2 på sidan 12).

VaR

Ett mer sofistikerat riskmått än standardavvikelsen är VaR, som är vanligt förekommande i olika riskhanteringssammanhang – bl.a. i Riksgäldens statsskuldsförvaltning. Med VaR menas ett belopp som man inte förlorar mer än med en viss sannolikhet givet en vald konfidensgrad, ϑ.[6]

$$VaR_\vartheta(L) = \min\{l \mid P(L \le l) \ge \vartheta\} \tag{13}$$

Genom att subtrahera förväntad förlust från VaR fås ett mått på den oförväntade förlusten för den valda konfidensgraden.

En nackdel med VaR är emellertid att måttet visar den minsta möjliga förlusten givet den valda konfidensgraden. Därmed fås ingen information om de förluster som överstiger VaR. Vidare kan det vara svårt att beräkna VaR för höga konfidensgrader med hög precision. Dessutom är VaR inte ett koherent riskmått (se nästa delavsnitt för en kortfattad beskrivning av ett koherent riskmått).

Villkorlig VaR

Ett komplement till VaR är CVaR.[7] Det är ett riskmått som, till skillnad från VaR, tar hänsyn till samtliga förluster över en specifik nivå i stället för ett enstaka utfall. CVaR bestäms genom att beräkna den förväntade förlusten *givet att* den faktiska förlusten är större än VaR för en vald konfidensgrad.

$$CVaR_\vartheta = E[L \mid L > VaR_\vartheta(L)] \tag{14}$$

Differensen mellan den betingade förväntade förlusten i samband (14) och den obetingade förväntade förlusten i samband (7) resulterar sedan i ett mått på oförväntad förlust.

$$UL = CVaR_\vartheta - E(L) \tag{15}$$

Fördelen med CVaR är att måttet dels inkluderar utfallen i förlustfördelningens ”svans”, dels är ett koherent riskmått. Det senare betyder att riskmåttet är:

- Monotont (en portfölj med relativt högre risk avspeglas i ett högre riskmått)
- Subadditivt (se tidigare resonemang på sidan 14)
- Positivt homogent (en skalning av portföljen minskar eller ökar risken proportionerligt)

---

[6] Ett värde på VaR för exempelvis en konfidensgrad på 95 procent innebär att förlusterna överstiger VaR i 5 procent av fallen i förlustfördelningen.

[7] En synonym fackterm är ”Expected Shortfall” (som förkortas ES).

- Översättningsinvariant (tillförsel av en riskfri tillgång påverkar inte risken i den resterande portföljen)

Utöver det negativa med att CVaR är mindre intuitivt än VaR är annars nackdelarna delvis desamma. I likhet med VaR gäller exempelvis att precisionen i beräkningen av riskmåttet i regel avtar ju högre konfidensgrad som väljs.

3.3 CVaR beräknas för flera olika konfidensgrader

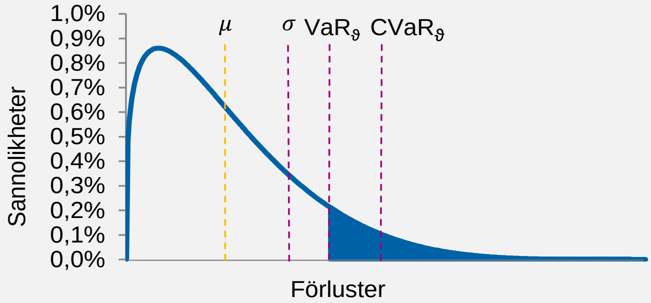
Även med valet av CVaR som riskmått återstår frågan om vilken konfidensgrad, ϑ, som oförväntad förlust ska beräknas för. Ju högre konfidensgrad, desto större oförväntad förlust.

Här ser Riksgälden ett mervärde i att beräkna CVaR för flera konfidensgrader; 90, 95 och 99 procents konfidensgrad. Dels för att minska inslaget av godtycklighet gällande valet av konfidensgrad, dels med hänsyn till den avtagande precisionen i beräkningen för högre konfidensgrader.

Olika riskmått i praktiken

I figur 3 illustreras de studerade riskmåtten utifrån en hypotetisk garanti- och utlåningsportföljs förlustfördelning.

Figur 3 Illustration av olika riskmått



Givet den förväntade förlusten (μ) blir den oförväntade förlusten (det vill säga spridningen kring den förväntade förlusten) olika stor beroende på vilket riskmått som används; Standardavvikelsen (σ), Value-at-Risk (VaR_{ϑ}), eller villkorlig Value-at-Risk ($CVaR_{\vartheta}$).

4 Indirekt förklaring av korrelerade fallissemang

En avgörande faktor gällande risken för stora förluster i en garanti- och utlåningsportfölj är fallissemangskorrelationer – exempelvis på grund av förekommande sektorkoncentrationer. Samtidigt finns det begränsade förutsättningar att modellera just korrelerade fallissemang. Att finna en lämplig lösning till denna utmaning är ett nyckelmoment i utformningen av en portföljmodell för att beräkna oförväntade förluster. Här har Riksgälden valt en Bernoullibaserad mixningsansats, med utgångspunkt i en *indirekt* förklaring av fallissemangskorrelationer.

4.1 Att modellera korrelerade fallissemang är komplicerat

Utmaningen i att modellera fallissemangskluster med hänsyn till samvariationer består i att dels mäta fallissemangskorrelationer, dels bestämma simultana sannolikheter med hänsyn till fallissemangskorrelationer.

Fallissemangskorrelationer är svåra att mäta

Fallissemang inträffar sällan och kan endast inträffa en gång för samma skuldförbindelse. Det faktum att simultana fallissemang är ännu mer sällsynta bidrar till att det i regel finns en alltför liten mängd data för att kunna producera tillförlitliga skattningar av (parvisa) fallissemangskorrelationer.

Att mäta fallissemang, som inträffar plötsligt och oregelbundet, innebär således en väsensskild situation jämfört många andra finansiella modeller som handlar om att studera, mer eller mindre, kontinuerliga förändringar i olika faktorer – exempelvis förändringar i marknadspriser eller makroekonomiska storheter.

Givet denna förutsättning blir det nödvändigt att studera någon annan händelse som inträffar mer frekvent än fallissemang och som därmed är enklare att mäta, men som likväl kan användas för att förklara fallissemangskorrelationer.

Det traditionella sättet att bestämma simultana sannolikheter är inte tillämpligt

Vanligtvis bestäms den simultana sannolikhetsfördelningen för flera utfall på en och samma gång genom att lösgöra beroendestrukturen från sannolikheterna för enskilda utfall (s.k. marginella sannolikheter). Ett typexempel är när normalfördelningen används, vilken har den angenäma egenskapen att den kan bestämmas i flera dimensioner utifrån respektive marginell normalfördelning och en korrelationsmatris.[8] Gällande icke-normalfördelade slumpvariabler är ett motsvarande, om än mer komplicerat, alternativ att utnyttja en s.k. copulafunktion.

Med beaktande av den generella svårigheten att mäta fallissemangskorrelationer är emellertid den traditionella ansatsen inte tillämpbar. För statens portfölj, med flera tusen garantier och lån, är det dessutom opraktiskt att hantera en korrelationsmatris eller en copulafunktion i tusentals dimensioner.

En mixningsansats erbjuder en elegant lösning på ett i grund och botten komplicerat problem

En vedertagen lösning på de uppmärksammade problemen är en mixningsansats. Det är en ansats som, givet de utmaningar som finns, tillhandahåller ett enkelt sätt att bestämma simultana fallissemangssannolikheter med hjälp av en indirekt förklaring av fallissemangskorrelationer.

Ansatsen bygger på fyra grundläggande komponenter:

- Slumpmässiga fallissemangssannolikheter
- Bakgrundsfaktorer som förklarar gemensamma förändringar i fallissemangssannolikheterna
- Betingat oberoende
- Obetingade simultana sannolikheter

Mixning

Antag en given mix av garanti- och låntagare i en portfölj, där var och en har en bestämd kreditvärdighet. Om kreditvärdigheten hos varje motpart i stället är rörlig med hänsyn till utvecklingen i ekonomin, fås för varje (slumpmässigt) ekonomiskt scenario en ny mix av portföljens sammansättning avseende garanti- och låntagarnas kreditvärdighet. Därutav begreppet mixning.

Slumpmässiga fallissemangssannolikheter

Genom att hantera varje garanti- och låntagares sannolikhet för fallissemang som en slumpvariabel möjliggörs fallissemangsfrekvenser som är högre eller lägre än i ett normalläge. Högre fallissemangsfrekvenser än i genomsnitt speglar exempelvis en situation där kreditförluster i portföljen sammanfaller i kluster.

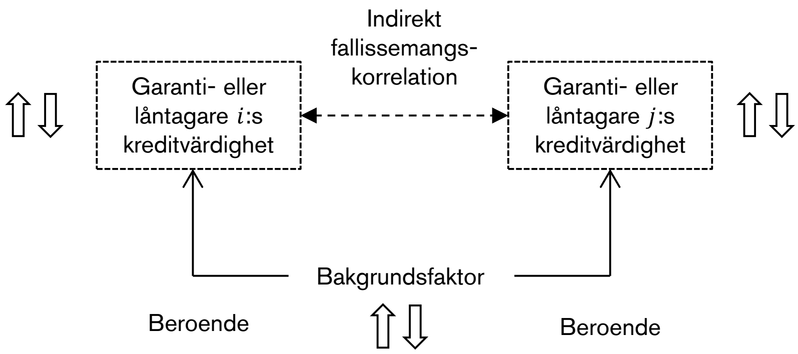
---

[8] Blom, Gunnar (1984): Sannolikhetsteori med tillämpningar A. Studentlitteratur. Lund. S. 177–178. ISBN 91-44-04372-4.

Gemensamma bakgrundsfaktorer

Om flera garanti- och låntagares sannolikhet för fallissemang till exempel ökar samtidigt av samma bakomliggande orsak ges ett *indirekt* uttryck för fallissemangskorrelationer. Ett sätt att formalisera denna mekanism är att låta varje enskild garanti- och låntagares sannolikhet för fallissemang vara en funktion av slumpmässiga utfall på en eller flera bakgrundsfaktorer (se figur 4).

Figur 4 Indirekt fallissemangskorrelation



Gemensamma bakgrundsfaktorer har en direkt koppling till innebörden av sektorkoncentrationer och systematisk risk i en garanti- och utlåningsportfölj – som just handlar om gemensamma förutsättningar som påverkar flertalet garanti- och låntagare samtidigt och på ett liknande sätt.

För enkelhetens skull begränsas den konceptuella framställningen till en gemensam bakgrundsfaktor, X, vilket innebär en en-faktor modell. De enskilda fallissemangssannolikheternas slumpmässiga egenskaper bestäms av bakgrundsfaktorns täthetsfunktion, $f_X(x)$, som talar om hur sannolika enskilda utfall på X är i förhållande till varandra.

Förfarandet innebär att den fördelning som gäller för respektive garanti- och låntagares indikatorvariabel är slumpmässig i sig, $D \sim Ber[p(X)]$ (jämför med samband (1) på sidan 9). Det är således inte bara utfallen som är slumpmässiga (fallissemang eller ej fallissemang), utan även varje garanti- och låntagares kreditvärdighet (sannolikheten för fallissemang).

I och med detta gäller följande för den enskilde garanti- eller låntagarens fallissemangssannolikhet,

$$P(D = 1) = E_X[E(D \mid X)] = E[1 \times P(D = 1 \mid X) + 0 \times P(D = 0 \mid X] \quad (16)$$

$$= E[p(X)]$$

där $p(X)$ utgör en s.k. mixningsvariabel.

Betingat oberoende

En bärande del i en mixningsansats är ett antagande om betingat oberoende. Konceptuellt innebär det att händelserna A och B är betingat oberoende *givet* vetskapen om utfallet på X om, och endast om, kunskapen om utfallet på A inte tillför någon information för att avgöra sannolikheten att B inträffar och vice versa.

Poängen med antagandet är att komma åt en matematisk finess. Förutsatt betingat oberoende kan nämligen betingade simultana sannolikheter för olika utfall bestämmas som produkten av de marginella sannolikheterna för respektive utfall *givet* kännedom om utfallet på X, vilket är en trivial beräkning.

$$P(A \cap B \mid X = x) = P(A \mid X = x) \times P(B \mid X = x) \tag{17}$$

Den betingade simultana sannolikheten för olika utfall i en portfölj med n stycken garanti- och låntagare beräknas därmed med hjälp av en produktsumma.

$$P(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n \mid X = x) = \prod_{i=1}^{n} P(D_i = d_i \mid X = x) \tag{18}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p_i(x)^{d_i} \times [1 - p_i(x)]^{1-d_i}$$

där,

$$p_i(x)^{d_i} \times [1 - p_i(x)]^{1-d_i} = \begin{cases} p_i(x) & \text{om } d_i = 1 \\ 1 - p_i(x) & \text{om } d_i = 0 \end{cases}$$

Eller med andra ord, när det som olika garanti- och låntagare har gemensamt med en eller flera bakgrundsfaktorer väl är beaktat är det möjligt att räkna som om de vore oberoende.

Betingad simultan fallissemangssannolikhet

Matematiken i samband (18) kan illustreras med ett enkelt exempel. Antag en portfölj med tre stycken låntagare. Den betingade simultana sannolikheten att den första och andra låntagaren fallerar ($D_1 = 1$ och $D_2 = 1$) medan den tredje låntagaren inte fallerar ($D_3 = 0$) givet ett utfall x på den gemensamma bakgrundsfaktorn X ges av följande enkla beräkning.

Obetingade simultana sannolikheter

Med hänsyn till antagandet om betingat oberoende kan slutligen obetingade (simultana) sannolikheter bestämmas med hjälp av lagen om total sannolikhet.

$$P(A \cap B) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid X = x) \times P(B \mid X = x) \times f_X(x)dx \tag{19}$$

Obetingade simultana sannolikheter bestäms därmed genom att summera över samtliga betingade marginella sannolikheter med hänsyn till alla tänkbara utfall på den gemensamma bakgrundsfaktorn och tillhörande sannolikheter.

För en portfölj med n stycken garanti- och låntagare innebär det följande beräkning.

$$P(D_1 = d_1, \ldots, D_n = d_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} p_i(x)^{d_i} \times [1 - p_i(x)]^{1-d_1} f_X(x)dx \tag{20}$$

Med hjälp av samband (20) är det således möjligt att bestämma den simultana sannolikhetsfördelningen för (indirekt) korrelerade fallissemang i en garanti- och utlåningsportfölj (se textrutan på sidan 26 för ett beräkningsexempel).

Den illustrerade mixningsansatsen är sedan möjlig att generalisera med hänsyn till en modell med fler bakgrundsfaktorer, vilket ger en fler-faktor modell.

4.2 Parvisa fallissemangskorrelationer bestäms endogent

Styrkan i fallissemangskorrelationen mellan olika par av garanti- och låntagare ges endogent med hjälp av mixningsansatsen (se sidan 60 för en härledning).

$$\rho\left(D_i, D_j\right) = \frac{E\left[p_i(X) \times p_j(X)\right] - E\left[p_i(X)\right] \times E\left[p_j(X)\right]}{\sqrt{E\left[p_i(X)\right] \times \left(1 - E\left[p_i(X)\right]\right)} \times \sqrt{E\left[p_i(X)\right] \times \left(1 - E\left[p_i(X)\right]\right)}} \tag{21}$$

Av samband (21) framgår att den parvisa fallissemangskorrelationen mellan olika garanti- och låntagare förklaras av mixningsvariabeln $p_i(X)$. Den parvisa fallissemangskorrelationen är således en endogen variabel som bestäms av modellen, vilket skiljer sig från en traditionell ansats där korrelationskoefficienten i regel hanteras som exogen variabel som bestäms utanför modellen.

Om man i illustrativt syfte antar en homogen portfölj med identiska garanti- och låntagare – vilket innebär att $p_i(X) = p_j(X) = p(X)$ – fås ett förenklat uttryck av samband (21) (se sidan 61 för en härledning).

$$\rho\left(D_i, D_j\right) = \frac{Var[p(X)]}{E[p(X)] \times (1 - E[p(X)])} \tag{22}$$

Det förenklade uttrycket synliggör att styrkan i den parvisa fallissemangskorrelationen mellan olika garanti- och låntagare beror på:

- Variansen i den gemensamma bakgrundsfaktorn, eftersom en högre eller lägre varians i bakgrundsfaktorn medför en högre eller lägre varians i mixningsvariabeln. Ju mer volatil den gemensamma ekonomiska miljön är, desto starkare samvariation mellan garanti- och låntagarna.
- Garanti- och låntagarnas genomsnittliga fallissemangssannolikhet. Låntagare med svag kreditvärdighet är mer känsliga för förändringar i den ekonomiska miljö de verkar i och samvarierar därför mer med varandra än de med god kreditvärdighet.

Samband (22) gör det dessutom tydligt att en mixningsansats är begränsad till positiva fallissemangskorrelationer, eftersom både $Var[p(X)]$ och $E[p(X)]$ alltid är positiva.

4.3 Fallissemangssmitta faller utanför mixningsansatsen

I och med en mixningsansats antas att det som olika garanti- och låntagare har gemensamt till fullo beskrivs av deras gemensamma beroende av en eller flera bakgrundsvariabler. Därutöver förutsätts att de inte har något ytterligare gemensamt.

Den valda mixningsansatsen går således hand i hand med (indirekta) fallissemangskorrelationer som beror på sektorkoncentrationer och förändringar i den allmänna ekonomiska utvecklingen. Situationer där det förekommer affärsmässiga eller juridiska förbindelser som ger upphov till ”smittorisker” faller dock utanför en mixningsansats. Den senare typen av (direkta) fallissemangskorrelationer hanteras i stället separat.

Här har Riksgälden valt att utanför modellen slå ihop de par eller grupper av garantier och lån som bedöms vara föremål för potentiell fallissemangssmitta.[9] Det är en enkel om än konservativ lösning, av den orsaken att den implicerar 100 procents korrelation mellan de garanti- och låntagare som lösningen avser.

4.4 Teoretiska koncept som substitut till statistisk analys medför en betydande modellosäkerhet

En indirekt förklaring av fallissemangskorrelationer, med hjälp av en mixningsansats, erbjuder en elegant lösning på ett komplicerat problem, men bygger i hög grad på antaganden och förenklingar. Det är i sig inget fel med det. Om verkligheten är alltför komplex väljer vi att formulera ett likartat problem som är enklare att lösa, med förhoppningen att den senare lösningen är en godtagbar approximation av det initiala problemet.

[9] Om de garantier och lån som slås ihop gäller garanti- och låntagare med olika kreditvärdighet, och därmed olika sannolikhet för fallissemang, används den högsta sannolikheten för fallissemang för den sammanslagna exponeringen.

I samband med portföljbaserad kreditriskanalys är det dock en svaghet att det saknas möjlighet att undersöka hur väl gjorda antaganden och förenklingar stämmer med verkligheten. Det finns helt enkelt inte tillräckligt med data för att utvärdera de sällsynta händelser som beskrivs av de matematiska sambanden i modellen (det vill säga korrelerade fallissemang som ger upphov till omfattande fallissemangskluster). En beräkning från en modell som inte kan utvärderas i ett statistiskt test innebär i praktiken en gissning, hur avancerad modellen än är.

Den uppmärksammade svagheten ger upphov till en påtaglig modellosäkerhet, som innebär att förändringar i de antaganden och förenklingar som modellen bygger på kan få betydande genomslag på beräkningsresultaten.

Den föreliggande modellosäkerheten i kombination med att frågeställningen (vad som ska beräknas) inte är given gör gällande att portföljmodellens resultat ska tolkas och användas med försiktighet.

Beräkning av simultana fallissemangssannolikheter

Antag en portfölj med två stycken lån. Sannolikheten för fallissemang är 1 procent för låntagare 1 och 3 procent för låntagare 2. För portföljen finns fyra möjliga utfall; ingen av låntagarna fallerar ($D_1 = 0,\ D_2 = 0$), låntagare 1 fallerar men ej låntagare 2 ($D_1 = 1,\ D_2 = 0$), låntagare 2 fallerar men ej låntagare 1 ($D_1 = 0,\ D_2 = 0$) samt att både låntagare 1 och 2 fallerar ($D_1 = 0,\ D_2 = 0$).

Om oberoende mellan låntagarna gäller fås följande simultana sannolikheter.

$P(D_1 = 0, D_2 = 0) = (1 - 0{,}01) \times (1 - 0{,}03) = 96{,}03\ \%$

$P(D_1 = 1, D_2 = 0) = 0{,}01 \times (1 - 0{,}03) = 0{,}97\ \%$

$P(D_1 = 0, D_2 = 1) = (1 - 0{,}01) \times 0{,}03 = 2{,}97\ \%$

$P(D_1 = 1, D_2 = 1) = 0{,}01 \times 0{,}03 = 0{,}03\ \%$

Om det i stället finns en *samvariation* mellan låntagarna införs ett antagande om slumpmässiga fallissemangssannolikheter som en funktion av en gemensam bakgrundsfaktor X, som en representation för den allmänna ekonomiska utvecklingen. Med 50 procents sannolikhet ger bakgrundsfaktorn att låntagarnas fallissemangssannolikheter blir 1,5 respektive 4,5 procent, som uttryck för en lågkonjunktur. Med resterande 50 procents sannolikhet minskar i stället låntagarnas fallissemangssannolikheter till 0,5 respektive 1,5 procent, som uttryck för en högkonjunktur. Med hjälp av betingat oberoende och mixning beräknas följande simultana sannolikheter.

$P(D_1 = 0, D_2 = 0) = (1 - 0{,}015) \times (1 - 0{,}045) \times 0{,}5 + (1 - 0{,}005) \times (1 - 0{,}015) \times 0{,}5 = 96{,}04\ \%$

$P(D_1 = 1, D_2 = 0) = 0{,}015 \times (1 - 0{,}045) \times 0{,}5 + 0{,}005 \times (1 - 0{,}015) \times 0{,}5 = 0{,}96\ \%$

$P(D_1 = 0, D_2 = 1) = (1 - 0{,}015) \times 0{,}045 \times 0{,}5 + (1 - 0{,}005) \times 0{,}015 \times 0{,}5 = 2{,}96\ \%$

$P(D_1 = 1, D_2 = 1) = 0{,}015 \times 0{,}045 \times 0{,}5 + 0{,}005 \times 0{,}015 \times 0{,}5 = 0{,}04\ \%$

När samvariation tas i beaktande ökar sannolikheten för flera fallissemang samtidigt i exemplet. Sannolikheten är fortfarande låg i absoluta tal, men drygt 30 procent högre i jämförelse med situationen där oberoende gäller mellan låntagarna. Sannolikheten för att inte något fallissemang sker överhuvudtaget ökar även den. Lika logiskt är att sannolikheten för att endast ett fallissemang inträffar minskar – det vill säga sannolikheten för att den ena eller den andra låntagaren fallerar. Införandet av (indirekta) samvariationer påverkar således hur sannolikheterna fördelas. Den totala sannolikhetsmassan är dock oförändrad.

5 CreditRisk+ som en modellmässig utgångspunkt

5.1 Det finns tre typmodeller som utgör ”best practise”

Utifrån en mixningsansats finns det tre typer av portföljmodeller som utgör vedertagen metodpraxis; *ekonometriska modeller*, *tillgångsvärdesmodeller* och *aktuariella modeller* (se textrutan på nästa sida för en kortfattad översikt av respektive modell).

Det som främst skiljer respektive typ av modell från den gemensamma ansatsen är valet av bakgrundsfaktorer.

5.2 Viktiga förutsättningar att förhålla sig till i valet av modell

Att välja modell handlar mindre om teoretisk korrekthet, eftersom samtliga typmodeller bygger på samma grundläggande antaganden och moment, och mer om den praktiska hanteringen med hänsyn till den specifika portföljens egenskaper och tillgången till data.

En heterogen portfölj ställer ökade krav på modellen

En viktig aspekt att förhålla sig till i valet av modell är den specifika portföljens egenskaper. En homogen portfölj, där flertalet garantier och lån i portföljen har liknande egenskaper, möjliggör enklare beräkningar och underlättar datahanteringen. Typiska exempel är en portfölj med ett stort antal mindre hushållslån eller en portfölj med företagsutlåning som är nischad mot en specifik bransch. Liknande förutsättningar gäller om en portfölj kan delas upp i mindre antal homogena delportföljer.

Statens portfölj är emellertid påtagligt heterogen med hänsyn till att:

- Garanti- och lånebeloppen är av kraftigt varierande storlek
- Garanti- och låntagarna är av olika karaktär (små- och medelstora företag, stora företag, projekt och länder), varierande kreditvärdighet och är verksamma inom ett flertal olika sektorer
- Garantierna och lånen har olika villkor, vilket bl.a. innebär olika förutsättningar och utsikter för återvinningar med hänsyn till fordrans prioritet i händelse av fallissemang

Ju högre grad av heterogenitet i portföljen, desto fler riskfaktorer att modellera. Att beräkna oförväntade förluster i statens garanti- och utlåningsportfölj är således en synnerligen komplicerad uppgift.

Det saknas portföljbaserade data att kalibrera modellen mot

En annan viktig aspekt är att det inte finns något samlat fallissemangs- och förlustdata för statens garanti- och utlåningsportfölj, eller någon annan motsvarande portfölj, som modellen kan kalibreras mot. Det påkallar en modell som låter sig hanteras nedifrån-och-upp, där tillämpliga parametrar för olika delar av modellen bestäms var för sig.

5.3 Riksgälden har valt en aktuariell modell

Utifrån rådande förutsättningar har Riksgälden valt en aktuariell modell. Bland annat med hänsyn till:

- Möjligheten att på ett relativt enkelt sätt kunna modifiera modellen utefter de förutsättningar som gäller för statens portfölj
- Att fallissemang hanteras som en helt och hållet slumpmässig händelse
- Att modellen innehåller ett förhållandevis litet antal parametrar som är möjliga att bestämma med hjälp av de rating- och sektorbaserade data som de internationella kreditvärderingsinstituten sammanställer

5.4 Den underliggande faktormodellen i CreditRisk+

Den portföljmodell Riksgälden utvecklat är baserad på den underliggande faktormodellen i CreditRisk+. Det är en etablerad standardmodell som ursprungligen togs fram av Credit Suisse First Boston International (CSFB).[10] En fördel med CreditRisk+ är att modellen aldrig har kommersialiserats, utan tanken var redan från början att den skulle kunna modifieras utefter användarens preferenser och behov.

Modellen innebär att enskilda garanti- och låntagares sannolikhet för fallissemang hanteras som en funktion av slumpmässiga förändringar i den genomsnittliga fallissemangsfrekvensen för olika sektorer. En ökad genomsnittlig fallissemangsfrekvens symboliserar en nedgång i sektorn i fråga, vilket innebär fler fallissemang på en och samma gång jämfört med ett normalläge. Omvänt symboliserar en minskad genomsnittlig fallissemangsfrekvens en motsvarande uppgång, och med det färre fallissemang än normalt. I enlighet med en mixningsansats innebär fler eller färre fallissemang än normalt ett (indirekt) uttryck för fallissemangskorrelationer.

Olika garanti- och låntagare är i regel olika känsliga för förändringar i den eller de bakgrundsfaktorer som de har gemensamt. Ju mer känsliga de är för förändringar i en och samma bakgrundsfaktor, desto mer samvarierar de. Varje garanti- och låntagares känslighet ges av en faktorvikt i intervallet noll (noll procent) till ett (hundra procent).

[10] Credit Suisse (1997). CreditRisk+ A Credit Risk Management Framework. http://www.csfb.com/institutional/research/assets/creditrisk.pdf.

Typmodeller som bygger på en mixningsansats

Nedan ges en kortfattad översikt av olika typmodeller som är baserade på en mixningsansats.[11]

Ekonometriska modeller

Förändringar i enskilda garanti- och låntagares sannolikhet för fallissemang förklaras av (slumpmässiga) förändringar i olika makroekonomiska faktorer.

Ett exempel på denna typ av modell är standardmodellen Credit Portfolio View.

Tillgångsvärdesmodeller

Förändringar i en eller flera latenta (icke-observerbara) bakgrundsfaktorer förklarar förändringar i enskilda garanti- och låntagares tillgångsvärden. Med hjälp av förenklingen att fallissemang likställs med insufficiens – eller annorlunda uttryckt, teknisk insolvens – förklarar förändrade tillgångsvärden i sin tur förändringar i sannolikheten för fallissemang.

KMV Portfolio Manager och CreditMetrics är exempel på vanligt förekommande standardmodeller. Ett annat exempel är den avancerade IRK-metoden inom ramen för Baselregelverket.[12]

Aktuariella modeller

Upp- och nedgångar i sannolikheten för fallissemang beror på (slumpmässiga) förändringar i den genomsnittliga fallissemangsfrekvensen för specifika sektorer och/eller ekonomin i stort.

Standardmodellen CreditRisk+ är ett etablerat exempel på denna typ av modell.

[11] För en mer utförlig översikt se Hickman, Andrew och Koyluoglu H. Ugur (1998): Reconcilable Differences. Risk, Volym 11, Nummer 10. S. 56–62.

[12] Basel Committee on Banking Supervision (2005). An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions. http://www.bis.org/bcbs/irbriskweight.pdf.

Modellen, i form av en linjär fler-faktor modell, specificeras på följande sätt.[13]

$$p_i(S) = p_i \times \left[w_{i,0} \times S_0 + \sum_{k=1}^{m} w_{i,k} \times S_k\right] \qquad (23)$$

där,

$S_k = \frac{X_k}{E(X_k)}$,

$S_0 \equiv 1$, och

$$w_{i,0} = 1 - \sum_{k=1}^{m} w_{i,k}$$

Vidare gäller följande notation:

- $p_i(S)$ står för garanti- eller låntagare i:s slumpmässiga sannolikhet för fallissemang som en funktion av en uppsättning bakgrundsfaktorer, $S = \{S_0, \ldots, S_m\}$.
- p_i är den långsiktigt genomsnittliga sannolikheten för fallissemang för garanti- eller låntagare i
- S_k ger uttryck för bakgrundsfaktorn för sektor k (där S_0 utgör ett specialfall i form en residualfaktor, som uttryck för den del av modellen som inte förklaras av någon sektor alls)
- $w_{i,k}$ motsvarar i sin tur garanti- eller låntagare i:s faktorvikt gällande sektor k

Modellspecifikationen i samband (23) innebär, i all sin enkelhet, att varje bakgrundsfaktor fungerar som en multipel, där varje enskild garanti- och låntagares fallissemangssannolikhet skalas upp- eller ned beroende på utfallet på de bakgrundsfaktorer som de är exponerade – i praktiken om de är större eller mindre än ett.

I textrutan på sidan 33 redogörs för ett enkelt beräkningsexempel som illustrerar hur modellen fungerar.

5.5 Faktormodellens beståndsdelar

I det följande förklaras modellens olika beståndsdelar.

[13] Om modellen reduceras till endast en bakgrundsfaktor, som därmed är gemensam för samtliga garanti- och låntagare i en portfölj, förenklas samband (23) till $p_i(S) = p_i \times [(1 - w_i) + w_i \times S]$.

Normerade genomsnittliga fallissemangsfrekvenser

Varje bakgrundsfaktor i modellen, S_k, utgörs av den genomsnittliga fallissemangsfrekvensen, X_k, för respektive sektor som *normeras* med hänsyn till sitt väntevärde, $\frac{X_k}{E(X_k)}$. Av denna normering följer att varje bakgrundsfaktors väntevärde är lika med ett.

$$E(S_k) = E\left(\frac{X_k}{E(X_k)}\right) = \frac{1}{E(X_k)} \times E(X_k) = 1 \tag{24}$$

Resultatet i samband (24) utgör en viktig teknalitet som säkerställer att varje garanti- och låntagares förväntade fallissemangssannolikhet är lika med den långsiktigt genomsnittliga fallissemangssannolikheten (som ges utanför modellen).

$$E[p_i(S)] = p_i \times \sum_{k=0}^{m} w_{i,k} \times E(S_k) = p_i \tag{25}$$

Därmed påverkas inte beräkningen av förväntad förlust av modellen. Det är endast spridningen kring den förväntade förlusten som påverkas, vilket just är förtjänsten med en portföljmodell för att beräkna oförväntade förluster.

Oberoende och gammafördelade bakgrundsfaktorer

Gällande bakgrundsfaktorernas slumpmässiga egenskaper antas att de är sinsemellan oberoende och tillhör en gammafördelning, $S_k \sim \Gamma(\alpha_k, \beta_k)$. Gammafördelningen är en parametrisk fördelning som beskrivs av en formparameter, $\alpha_k > 0$, och en skalparameter, $\beta_k > 0$.

Gammafördelningen är i sammanhanget tilltalande i den meningen att den:

- Endast antar positiva värden
- Uppvisar skevhet
- Beskrivs med ett fåtal parametrar

Respektive bakgrundsfaktors slumpmässiga egenskaper ges av följande täthetsfunktion,

$$f_{S_k}(s_k; \alpha_k, \beta_k) = \frac{{s_k}^{\alpha_k - 1} \times e^{-\left(\frac{s_k}{\beta_k}\right)}}{{\beta_k}^{\alpha_k} \times \Gamma(\alpha_k)} \tag{26}$$

där $s_k \in (0, \infty)$. Funktionen $\Gamma(\alpha_k)$ i nämnaren utgör den s.k. gammafunktionen.

Gammafördelningens väntevärde och varians ges av följande uttryck (se sidan 61–62 för en härledning av respektive uttryck).

$$E(S_k) = \alpha_k \times \beta_k \tag{27}$$

$$Var(S_k) = \alpha_k \times \beta_k^2 \quad (28)$$

Med hjälp av notationen $Var(S_k) = \sigma_k^2$ och vetskapen om att $E(S_k)$ är lika med ett (se samband (24) på sidan 31) kan de antagna bakgrundsfaktorernas parametrar enkelt lösas ut ur samband (27) och (28), genom s.k. momentmatchning.

$$\alpha_k = \frac{1}{\sigma_k^2} \quad (29)$$

$$\beta_k = \sigma_k^2 \quad (30)$$

Enskilda exponeringar mot respektive sektor

Faktorvikten $w_{i,k}$ ger uttryck för hur känslig garanti- eller låntagare i:s fallissemangssannolikhet är för (slumpmässiga) förändringar i respektive bakgrundsfaktor. Eller med andra ord, hur exponerad varje garanti- och låntagare är mot förändringar i respektive sektor.

Residualvikten $w_{i,0}$ speglar i sin tur den del av förändringen i en eller flera bakrundsfaktorer som inte har någon påverkan på garanti- eller låntagare i:s sannolikhet för fallissemang.

5.6 Storleken på de fallissemangskorrelationer som bestäms endogent av standardmodellen

Den presenterade standardmodellen implicerar följande parvisa fallissemangskorrelation mellan olika garanti- och låntagare som tillhör samma sektor.[14]

$$\rho(D_i, D_j) = \frac{\sqrt{p_i \times p_j}}{\sqrt{(1-p_i)} \times \sqrt{(1-p_j)}} \times \sum_{k=1}^{m} w_{i,k} w_{j,k} \times Var(S_k) \quad (31)$$

Styrkan i fallissemangskorrelationen beror således på:

- Volatiliteten i den för varje sektor gemensamma ekonomiska miljön ($Var[S_k]$)
- Respektive garanti- och låntagares kreditvärdighet (p_i och p_j)
- Faktorvikterna som speglar respektive garanti- och låntagares känslighet för förändringar i sektorn ($w_{i,k}$ och $w_{j,k}$)

De matematiska resultat som följer med modellen har således en rimlig ekonomisk tolkning.

[14] För en härledning se Gundlach, Matthias och Lehrbass, Frank (2004): CreditRisk+ in the Banking Industry. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. S. 13. ISBN 3-540-20738-4.

Betingade fallissemangssannolikheter i standardmodellen

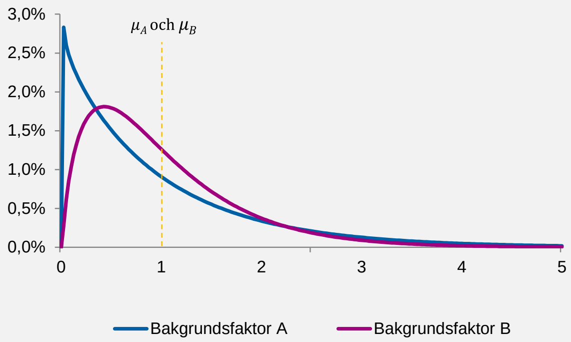
Antag en portfölj med fyra stycken låntagare, där portföljen är exponerad mot två olika sektorer (sektor A och B). I tabell 2 redogörs för de enskilda låntagarnas förväntade sannolikhet för fallissemang och exponering mot respektive sektor.

Tabell 2 Enskilda låntagares fallissemangssannolikhet och faktor vikt

	Sannolikhet för fallissemang	Faktorvikter		
		Sektor A	Sektor B	Residualen
Låntagare 1	1 %	60 %	25 %	15 %
Låntagare 2	3 %	80 %	0 %	20 %
Låntagare 3	1 %	50 %	40 %	10 %
Låntagare 4	3 %	5 %	65 %	30 %

Antag vidare att den normerade genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i sektor A respektive B tillhör följande gammafördelningar (se figur 5).

Figur 5 Bakgrundsfaktorernas täthetsfunktioner



I ett scenario, av en mängd möjliga scenarion, blir det slumpmässiga utfallet på bakgrundsvariabeln A lika med 2,5 (som ett uttryck för en kraftig, och förhållandevis osannolik, nedgång i sektor A). Motsvarande utfall på bakgrundsvariabeln B blir 0,9 (vilket ligger i närheten av ett normalläge i sektor B). I det specifika scenariot ger standardmodellen följande *betingade* sannolikheter för fallissemang.

$$P(D_1 = 1 \mid S_A = 2{,}5, S_B = 0{,}9) = 1\,\% \times (0{,}15 \times 1 + 0{,}6 \times 2{,}5 + 0{,}25 \times 0{,}9) = 1{,}875\,\%$$

$$P(D_2 = 1 \mid S_A = 2{,}5, S_B = 0{,}9) = 3\,\% \times (0{,}2 \times 1 + 0{,}8 \times 2{,}5 + 0 \times 0{,}9) = 6{,}6\,\%$$

$$P(D_3 = 1 \mid S_A = 2{,}5, S_B = 0{,}9) = 1\,\% \times (0{,}1 \times 1 + 0{,}5 \times 2{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}9) = 1{,}7\,\%$$

$$P(D_4 = 1 \mid S_A = 2{,}5, S_B = 0{,}9) = 3\,\% \times (0{,}3 \times 1 + 0{,}05 \times 2{,}5 + 0{,}65 \times 0{,}9) = 3{,}0\,\%$$

6 Standardmodellen modifieras för analysen av statens portfölj

Med hänsyn till dels de praktiska förutsättningar som gäller (såsom tillgången till data), dels behovet av att inkludera fler riskfaktorer i modellen (såsom samvariationer mellan olika sektorer) har Riksgälden gjort ett antal modifieringar av standardmodellen. CreditRisk+ är emellertid fortfarande utgångspunkten, men modellen plockas isär och sätts sedan ihop igen på ett annat sätt än standardmodellen och med ett par tillägg (se tabell 3 för en sammanfattning).

Tabell 3 Sammanfattning av standardmodellens modifieringar

Standardmodellen	Modifiering
Avsteg från standardmodellen	
▪ Analytisk approximation ▪ Multipel sektortillhörighet	▪ Numerisk approximation ▪ Unik sektortillhörighet
Tillägg till standardmodellen	
▪ Oberoende bakgrundsfaktorer ▪ Konstanta återvinningsgrader ▪ Oberoende mellan fallissemangsfrekvens och återvinningsgrad	▪ Korrelerade bakgrundsfaktorer ▪ Slumpmässiga återvinningsgrader ▪ Samvariation mellan fallissemangsfrekvens och återvinningsgrad

6.1 Monte Carlo underlättar modifieringar av modellen

I standardversionen av CreditRisk+ utnyttjas en s.k. sannolikhetsgenererande funktion som, med stöd av ett antal matematiska förenklingar och approximationer, gör det möjligt att beräkna portföljens förlustfördelning med ett analytiskt uttryck.[15]

Riksgälden ser emellertid inget egenvärde i möjligheten att beräkna förlustfördelningen med hjälp av en formel. Utifrån det synsättet finns i stort sett endast nackdelar med de förenklingar och approximationer som ett analytiskt uttryck förutsätter, eftersom de ofrånkomligen begränsar riskanalysen – med en möjlig underskattning av den oförväntade förlusten som följd.

[15] Gundlach, Matthias och Lehrbass, Frank (2004): CreditRisk+ in the Banking Industry. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. S. 7–24. ISBN 3-540-20738-4.

Riksgälden har i stället valt en *numerisk approximation* av förlustfördelningen med hjälp av Monte Carlo simulering. Det innebär visserligen ett betydande avsteg från CreditRisk+ i sin standardform, men gör det samtidigt enklare att utvidga modellen.

Det ska dock påpekas att heller inte Monte Carlo simulering är utan problem. De simuleringar som genereras i en dator utgör endast en approximation av den eller de slumpvariabler som modelleras.

Till att börja med är de slumptal som simuleras i en dator inga riktiga slumptal, utan s.k. pseudoslumptal som bestäms med hjälp av en bestämd algoritm (eftersom en dator är en deterministisk maskin). Avancerade mjukvaruprogram genererar dock pseudoslumptal som i regel framstår som slumpmässiga nog för att utgöra en godtagbar approximation av genuin slumpmässighet.[16]

Dessutom utgör de hypotetiska utfall som simuleras endast ett begränsat stickprov på den eller de slumpvariabler som simuleringen avser, vilket ger upphov till s.k. slumpfel. Ju fler utfall som simuleras, desto bättre beskriver det begränsade stickprovet den underliggande slumpvariabelns egenskaper. Att simulera ett stort antal utfall kan dock vara mycket tidskrävande.[17] Det gäller inte minst en modell som innehåller ett stort antal variabler (såsom portföljmodellen i fråga).

6.2 En fundamentalansats underlättar hanteringen av modellen

Med anledning av bristen på portföljbaserade data har Riksgälden gjort ett förenklat antagande om en s.k. fundamentalansats. Det innebär dels att varje enskild garanti- eller låntagare är unikt knuten till endast en sektor, dels att varje förändring i sektorns bakgrundsfaktor ger upphov till en motsvarande förändring i den enskilde garanti- eller låntagarens fallissemangsfrekvens.

I och med en fundamentalansats gäller därför att faktorvikten, $w_{i,k}$, är lika med ett (hundra procent) för den unika sektor k som garanti- eller låntagare i tillhör och noll (noll procent) för alla andra sektorer, vilket ofrånkomligen medför en förenkling. I verkligheten kan en garanti- eller låntagares framgångar eller missöden mycket väl påverkas av utvecklingen i flera sektorer. Till exempel ett globalt företag med verksamhet inom flera olika branscher.

Vidare följer att residualvikten, $w_{i,0}$, är lika med noll (noll procent) för samtliga garanti- och låntagare, vilket även det är en förenkling. Därmed bortses från att olika garanti- och

[16] McLeish, Don L. (2005): Monte Carlo Simulation and Finance. John Wiley & Sons, Inc. S. 77–92. ISBN 13 978-0-471-67778-9.

[17] För att öka precisionen i en simulering med exempelvis en faktor 10 krävs en ökning av antalet simuleringar med en faktor 100.

låntagare har specifika egenskaper, till exempel kreditvärdighet och storlek, som gör dem olika känsliga för förändringar i den ekonomiska miljö de verkar i.

6.3 Korrelationer mellan olika sektorer

I standardversionen av CreditRisk+ görs ett antagande om oberoende mellan de sektorbaserade bakgrundsfaktorerna i modellen (se sidan 31). Det innebär att de fallissemangskorrelationer som finns mellan garanti- och låntagare i olika sektorer underskattas i modellen. Med en fundamentalansats, där varje garanti- och låntagare är unikt knuten till endast en sektor, ökar problematiken ytterligare. Den senare förenklingen innebär nämligen att standardmodellen inte ger något bidrag alls till denna typ av korrelationer.

Ett sätt att hantera det uppmärksammade tillkortakommandet är att lägga till en generell bakgrundsfaktor, Q, till modellen som samtliga sektorspecifika bakgrundsfaktorer beror på (vilket är en lösning som ursprungligen togs fram av Götz Giese).[18]

För den generella bakgrundsfaktorn görs sedan ett antagande om att den tillhör en gammafördelning med följande egenskaper,

$$E(Q) = 1 \tag{32}$$

$$Var(Q) = \bar{\sigma}^2 \tag{33}$$

vilket, analogt med samband (29) och (30), medför att $Q \sim \Gamma\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^2}, \bar{\sigma}^2\right)$.

Den generella bakgrundsfaktorn, Q, utgör en latent (icke-observerbar) slumpvariabel och har därför ingen reell innebörd. Den är endast utformad för att skapa en matematiskt angenäm korrelationsstruktur mellan de sektorspecifika bakgrundsfaktorerna i modellen. Däremot kan den generella bakgrundsfaktorn *tolkas* som den (normerade) genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i ekonomin i stort, vilken *symboliserar* tillståndet i den allmänna ekonomiska utvecklingen.

I nästa steg antas att varje sektorspecifik bakgrundsfaktors formparameter är en linjär funktion av den generella bakgrundsfaktorn,

$$\alpha_k(Q) = \alpha_k^* \times Q \tag{34}$$

där $\alpha_k^* > 0$ är en sektorspecifik konstant.

[18] Giese, Götz (2003): Enhancing CreditRisk+. Risk, Volym 16, Nummer 4. S. 73–77.

Samband (34) medför att $S_k \sim \Gamma(\alpha_k^* \times Q, \beta_k)$, där den generella bakgrundsfaktorn således påverkar samtliga sektorspecifika bakgrundsfaktorers enskilda fördelningar.

Exempel på den utvidgade modellens funktionssätt
Den sammansatta gammamodellens funktionssätt kan illustreras med ett enkelt exempel.

Om det exempelvis sker ett ogynnsamt utfall på den generella bakgrundsfaktorn innebär det sämre förutsättningar i samtliga sektorer på en och samma gång, vilket ökar sannolikheten för en högre genomsnittlig fallissemangsfrekvens i flera sektorer samtidigt. Denna förutsättning medför i sin tur en ökad sannolikhet för att garanti- och låntagare i olika sektorer blir föremål för en högre fallissemangssannolikhet än i ett normalläge, och med det en ökad sannolikhet för fallissemangskluster i flera sektorer samtidigt.

Den utvidgade delen av modellen har en direkt parallell till standardmodellen. Varje sektorspecifik bakgrundsfaktor, $S_k(Q)$, utgör nämligen en mixningsvariabel, analogt med $p_i(X)$. Därmed kan samma matematiska knep utnyttjas, där mixningsproceduren upprepas i flera steg (se textrutan på sidan 39 för ett enkelt beräkningsexempel).

1. *Givet* ett utfall på den generella bakgrundsfaktorn kan de olika sektorfaktorerna hanteras som om de vore oberoende.

2. *Givet* ett utfall på respektive sektorfaktor (givet utfallet på den generella bakgrundsfaktorn) kan i sin tur de enskilda garanti- och låntagarna betraktas som oberoende.

Förfarandet utgör en *sammansatt gammamodell* ("Compound Gamma Model" på engelska).

Den sammansatta gammamodellens egenskaper

Utifrån den utvidgade modellen gäller följande uttryck för respektive bakgrundsfaktors väntevärde och varians (se sidan 62–63 för en härledning av respektive uttryck).

$$E(S_k) = \alpha_k^* \times \beta_k \qquad (35)$$

$$Var(S_k) = \beta_k + \bar{\sigma}^2 \qquad (36)$$

Avseende samband (35) respektive (36) införs dessutom varsitt begränsande villkor. Ett villkor, $E(S_k) = 1$, som bevarar normeringen av den genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i varje sektor (så att $E[p_i(S)] = p_i$ fortfarande gäller). Ett annat villkor, $Var(S_k) = \sigma_k^2$, som säkerställer att de samvariationer som gäller *inom* varje sektor (som styrs av $Var[S_k]$) inte påverkas av att den generella bakgrundsfaktorn införs i modellen, eftersom syftet med den generella bakgrundsfaktorn endast är att förklara samvariationer *mellan* olika sektorer.

Givet dessa villkor gäller, analogt med samband (29) och (30), att varje sektorspecifik bakgrundsfaktors form- och skalparameter kan uttryckas på följande sätt, med hjälp av momentmatchning.

$$\alpha_k^* = \frac{1}{\sigma_k^2 - \bar{\sigma}^2} \tag{37}$$

$$\beta_k = \sigma_k^2 - \bar{\sigma}^2 \tag{38}$$

Eftersom varje sektorspecifik bakgrundsfaktors skalparameter är strikt positiv, $\beta_k > 0$, medför samband (38) att $\bar{\sigma}^2$ måste vara mindre än σ_k^2 för samtliga sektorer. Eller med andra ord, den generella bakgrundsfaktorns varians begränsas av den lägsta variansen i de sektorspecifika bakgrundsfaktorerna.

$$0 < \bar{\sigma}^2 < \min_k\{\sigma_k^2\} \tag{39}$$

Samband (39) kan tolkas som att förändringar i den allmänna ekonomiska utvecklingen har en mindre påverkan på sektorerna än motsvarande förändringar i den sektorspecifika utvecklingen (såsom strukturella skift eller substitution i en bransch).

Avseende samvariationen mellan olika sektorer härstammar den från en och samma källa, den generella bakgrundsfaktorn. Samvariationen i fråga är således homogen, vilket förtydligas av följande uttryck för kovariansen mellan de olika sektorerna (se sidan 63–64 för en härledning).

$$Cov(S_k, S_l) = \bar{\sigma}^2 \tag{40}$$

där $k \neq l$.

I och med samband (40) gäller således att ju större volatilitet i den allmänna ekonomiska utvecklingen, desto högre samvariation mellan de olika sektorerna i modellen.

Betingade fallissemangssannolikheter i den modifierade modellen

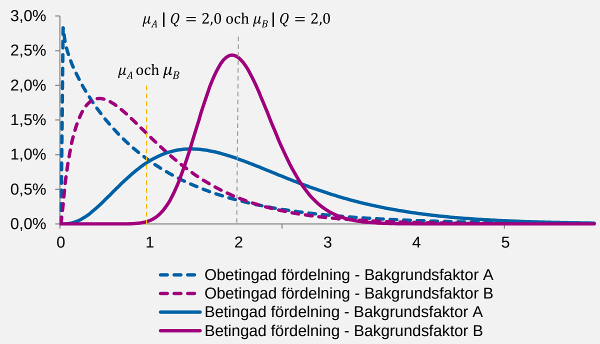
Antag en portfölj med fyra stycken låntagare, där portföljen är exponerad mot två olika sektorer (sektor A och B). Låntagare 1 och 2 är unikt knutna till sektor A, medan låntagare 3 och 4 är unikt knutna till sektor B. I tabell 4 nedan redogörs för de enskilda låntagarnas *förväntade* sannolikhet för fallissemang och exponering mot respektive sektor.

Tabell 4 Enskilda låntagares fallissemangssannolikheter och faktorvikter

	Sannolikhet för fallissemang	Faktorvikter		
		Sektor	Sektor B	Residualen
Låntagare 1	5 %	100 %	0 %	0 %
Låntagare 2	1 %	100 %	0 %	0 %
Låntagare 3	3 %	0 %	100 %	0 %
Låntagare 4	2 %	0 %	100 %	0 %

Antag vidare en generell bakgrundsfaktor som är gemensam för båda sektorerna, vilken antar ett värde på 2,0 (som uttryck för en nedgång i den allmänna ekonomiska utvecklingen). Givet detta utfall förklaras den normerade genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i sektor A respektive B av följande gammafördelningar (se figur 6).

Figur 6 Bakgrundsfaktorernas täthetsfunktioner (med och utan den generella faktorn)



Givet scenariot i den allmänna ekonomiska utvecklingen *förväntas* en högre genomsnittlig fallissemangsfrekvens än normalt i båda sektorerna samtidigt. Antag att värdet på bakgrundsfaktorn i sektor 1 respektive 2 blir 1,5 och 1,3 – vilket motsvarar en svag nedgång i båda sektorerna samtidigt. Det medför följande *betingade* sannolikheter för fallissemang.

$$P(D_1 = 1 \mid S_A = 1{,}5, S_B = 1{,}3) = 5\,\% \times (0 \times 1 + 1 \times 1{,}5 + 0 \times 1{,}3) = 7{,}5\,\%$$

$$P(D_1 = 1 \mid S_A = 1{,}5, S_B = 1{,}3) = 1\,\% \times (0 \times 1 + 1 \times 1{,}5 + 0 \times 1{,}3) = 1{,}5\,\%$$

$$P(D_1 = 1 \mid S_A = 1{,}5, S_B = 1{,}3) = 3\,\% \times (0 \times 1 + 0 \times 1{,}5 + 1 \times 1{,}3) = 3{,}9\,\%$$

$$P(D_1 = 1 \mid S_A = 1{,}5, S_B = 1{,}3) = 2\,\% \times (0 \times 1 + 0 \times 1{,}5 + 1 \times 1{,}3) = 2{,}6\,\%$$

Fallissemangskorrelationer mellan garanti- och låntagare i olika sektorer

Den utvidgade delen av modellen implicerar följande parvisa fallissemangskorrelation mellan olika garanti- och låntagare som tillhör olika sektorer.[19]

$$\rho\left(D_i, D_j\right) = \frac{\sqrt{p_i \times p_j}}{\sqrt{(1-p_i)} \times \sqrt{(1-p_j)}} \times \sum_{k,l=1}^{m} w_{i,k} w_{j,l} \times \bar{\sigma}^2 \tag{41}$$

Styrkan i de fallissemangskorrelationer som gäller mellan garanti- och låntagare i olika sektorer beror således på den generella bakgrundsfaktorns varians. Ju större volatilitet i den allmänna ekonomiska utvecklingen, desto högre samvariation mellan garanti- och låntagare i olika sektorer.

6.4 Slumpmässiga återvinningsgrader givet fallissemang

Oförväntade förluster förklaras inte bara av variationer i garanti- och låntagarnas fallissemangssannolikheter, utan även av variationer i återvinningsgraden givet fallissemang. I standardversionen av CreditRisk+ hanteras emellertid återvinningsgraden givet fallissemang som en konstant.

Denna begränsning i standardmodellen kan åtgärdas genom att modellera varje enskild garanti- och låntagares återvinningsgrad givet fallissemang som en slumpvariabel, som tillhör en standardiserad betafördelning, $RR \sim Beta(\gamma, \epsilon)$. Fördelningens egenskaper beskrivs av två formparametrar, $\gamma > 0$ och $\epsilon > 0$, med hänsyn till följande täthetsfunktion,

$$f_{RR}(rr;\ \gamma, \epsilon) = \frac{rr^{\gamma-1} \times (1-rr)^{\epsilon-1}}{B(\gamma, \epsilon)} \tag{42}$$

där $rr \in [0,1]$. Uttrycket $B(\gamma, \epsilon)$ i nämnaren utgör den s.k. Betafunktionen.

Just den standardiserade betafördelningen är i sammanhanget en vedertagen fördelning, bland annat med hänsyn till att fördelningen:

- Är begränsad i intervallet noll till ett, vilket går hand i hand med att återvinningsgraden i regel inte kan bli mindre än noll procent eller större än hundra procent av det garanterade eller utlånade beloppet
- Har en flexibel form som medger att återvinningsgraden givet fallissemang har olika egenskaper för olika prioritetsklasser
- Beskrivs med ett fåtal parametrar

[19] För en härledning se Gundlach, Matthias och Lehrbass, Frank (2004): CreditRisk+ in the Banking Industry. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. S. 154. ISBN 3-540-20738-4.

Att betafördelningens täthetsfunktion är unimodal (med endast en topp) är emellertid en svaghet. Det finns nämligen empiriska studier som visar att återvinningsgraden givet fallissemang typiskt sett är bimodal (med två toppar).[20]

Utifrån täthetsfunktionen i samband (42) gäller följande uttryck för återvinningsgradens väntevärde och varians (se sidan 64–65 för en härledning av respektive uttryck).

$$E(RR) = \frac{\gamma}{(\gamma+\epsilon)} \quad (43)$$

$$Var(RR) = \frac{\gamma\times\epsilon}{(\gamma+1+\varepsilon)\times(\gamma+\epsilon)^2} \quad (44)$$

Med hjälp av samband (43) och (44), samt notationen $E(RR) = \mu_{RR}$ och $Var(RR) = \sigma^2_{RR}$, kan formparametrarna γ och ϵ uttryckas på följande vis, genom momentmatchning.

$$\gamma = \mu_{RR} \times \left[\frac{\mu_{RR}-(1-\mu_{RR})}{\sigma^2_{RR}} - 1\right] \quad (45)$$

$$\epsilon = \left[\frac{1-\mu_{RR}}{\mu_{RR}}\right] \times \gamma \quad (46)$$

6.5 Samvariation mellan återvinningsgraden givet fallissemang och fallissemangsfrekvensen

Både intuition och empiri ger stöd för att det finns en systematisk (negativ) samvariation mellan fallissemangsfrekvensen och återvinningsgraden givet fallissemang.[21] När fallissemangsfrekvensen är högre än normalt är i regel återvinningsgraden givet fallissemang lägre än normalt, och vice versa (se sidan 14). Utan hänsyn till denna samvariation underskattas den oförväntade förlusten i en portfölj.

Den uppmärksammade samvariationen kan med fördel uttryckas som korrelationen mellan den genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i ekonomin i stort och den genomsnittliga återvinningsgraden givet fallissemang i ekonomin i stort. Att utgå ifrån aggregerade fallissemangs- och återvinningsvariabler implicerar dock ett förenklat antagande om att beroendestrukturen i fråga är homogen. I praktiken gäller rimligen att samvariationen ser olika ut beroende på om garanti- och låntagarna har en stark eller svag kreditvärdighet och om garanti- och låneengagemangen har förmånsrätt eller ej. Det är emellertid nyanser som är komplicerade att hantera i praktiken, dels med hänvisning till ett begränsat dataunderlag, dels att det blir tekniskt utmanande.

---

20 Schuermann, Til (2004): What Do We Know About Loss Given Default? http://fic.wharton.upenn.edu/fic/papers/04/0401.pdf.

21 Antens-Miller, Katarina (2007): The Relationship Between Default Rates and Recovery. Standard & Poor's RatingsDirect.

Därutöver är det en utmaning i sig att formalisera den uppmärksammade samvariationen. Det beror på att fallissemangsfrekvensen är gammafördelad och återvinningsgraden givet fallissemang är betafördelad. Därmed finns inget givet uttryck för den simultana fördelningen, med hänsyn till beroendet mellan respektive marginell fördelning.

En möjlig lösning på problemet är att modellera en copulafunktion. I det här fallet en bivariat copulafunktion, $C(u,v)$. Det är en funktion som, i likhet med en mixningsansats, kan utnyttjas som ett matematiskt knep för att bestämma simultana sannolikheter med hänsyn till samvariationer (se textrutan på sidan 43–44 för en kortfattad förklaring).

Vad det gäller samvariationen mellan återvinningsgraden givet fallissemang och fallissemangsfrekvensen, och de marginella fördelningarna för respektive faktor, har Riksgälden valt en implicit copulafunktion i form av en Gaussisk copulafunktion. I valet av copulafunktion har Riksgälden nöjt sig med en enkel formalisering av samvariationen, utan någon närmare hänsyn till copulans statistiska egenskaper. De tidsserier Riksgälden har tillgång till är helt enkelt för begränsade för en sådan analys.

Den valda copulafunktionen ges av följande uttryck.[22]

$$C(u,v;\ \delta) = \Phi(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v); \textstyle\sum) =$$

$$\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times e^{-\left[\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}\right]} dsdt \tag{47}$$

där $\rho \in [-1,1]$ står för korrelationskoefficienten i kovariansmatrisen $\sum = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ och Φ ger uttryck för fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen.[23]

Täthetsfunktionen för en Gaussisk copula ges i sin tur av följande uttryck, där φ är täthetsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen.[24]

$$c(u,v;\ \delta) = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v); \sum)}{\varphi(\Phi^{-1}(u)) \times \varphi(\Phi^{-1}(v))} = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times e^{-\left(\frac{\Phi^{-1}(u)^2 - 2\rho\Phi^{-1}(u)\times\Phi^{-1}(v) + \Phi^{-1}(u)^2}{2(1-\rho^2)}\right)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\left(\frac{\Phi^{-1}(u)^2}{2}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\left(\frac{\Phi^{-1}(v)^2}{2}\right)}} \tag{48}$$

---

22 Se Yates Roy D. och Goodman, David J. (1999): Probability and Stochastic Processes. John Wiley & Sons. New York. S. 186. ISBN 0-471-17837-3.

23 För en standardiserad normalfördelning, där variansen är lika med 1t, är kovariansmatrisen lika med korrelationsmatrisen.

24 En copulas täthetfunktion bestäms genom att derivera copulafunktionen partiellt två gånger $c(u,v;\ \pi) = \frac{\partial^2 C(u,v;\pi)}{\partial u \partial v} = \frac{f_{Z_1,Z_1}\left(F_{Z_1}^{-1}(u), F_{Z_2}^{-1}(v)\right)}{f_{Z_1}\left(F_{Z_1}^{-1}(u)\right) \times f_{Z_2}\left(F_{Z_2}^{-1}(v)\right)}$.

Copulafunktionen erbjuder en finurlig matematisk lösning

Antag en uppsättning *beroende* slumpvariabler X_1 och X_2 med marginella fördelningsfunktioner $F_{X_1}(x_1) = P(X_1 \leq x_1)$ och $F_{X_2}(x_2) = P(X_2 \leq x_2)$. Vidare gäller att det inte existerar något analytiskt uttryck som formaliserar fördelningsfunktionen, $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$, för samlade utfall på X_1 och X_2. En finurlig lösning till problemet är att utnyttja en copulafunktion, $C(u_1, u_2)$. Det är i sig en simultan fördelningsfunktion, fast för marginella slumpvariabler som är likformigt fördelade i intervallet noll till ett, $U_1 \sim Lik(0,1)$ och $U_2 \sim Lik(0,1)$. Eftersom en likformigt fördelad slumpvariabel i intervallet noll till ett kan mappas mot en annan slumpvariabel vars fördelningsfunktion har en invers som är väldefinierad (det vill säga att fördelningsfunktionen är strikt tilltagande). Därför är det möjligt att uttrycka beroendet mellan X_1 och X_2 och deras marginella fördelningar var för sig, för att sedan koppla ihop dem med hjälp av copulafunktionen (som betyder just koppling).

Fördelningsfunktionen $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ beskriver sannolikheten för att den enskilda slumpvariabeln Y, antar ett värde mindre eller lika med y. Det är således en funktion som transformerar ett vanligt tal, y, till ett annat tal i intervallet noll till ett (eftersom varje värde på fördelningsfunktionen motsvarar en sannolikhet). Förutsatt att slumpvariabeln Y är kontinuerlig gäller att den konstruerade slumpvariabeln $U = F_Y(Y)$ är likformigt fördelad på intervallet noll till ett, $U \sim Lik(0,1)$. Omvänt är det med hjälp av inversen $Y = F_Y^{-1}(U)$ möjligt att genomföra mappningen i motsatt riktning.[25]

Om ett beroende gäller mellan X_1 *och* X_2 är de konstruerade slumpvariablerna $U_1 = F_{X_1}(X_1)$ *och* $U_2 = F_{X_2}(X_2)$ i sin tur beroende. Om de konstruerade slumpvariablerna sedan mappas mot $Z_1 = F_{Z_1}^{-1}(U_1)$ och $Z_2 = F_{Z_2}^{-1}(U_2)$ är de fortfarande beroende, där Z_1 och Z_2 kan tillhöra vilken fördelning som helst. Om man till exempel väljer att Z_1 respektive Z_2 tillhör en standardiserad normalfördelning, $Z_1 \sim N(0,1)$ och $Z_2 \sim N(0,1)$, har det fördelen att det finns en känd simultan fördelning. I det här fallet den standardiserade simultana normalfördelningen, $[Z_1, Z_2] \sim N(0, \Sigma)$, där fördelningsfunktionen, $F_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2)$, beskriver beroendestrukturen och kovariansmatrisen, $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, beskriver styrkan i beroendet.

Med kännedom om $F_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2)$ går det att utnyttja att vilken existerande simultan fördelning som helst, inte bara den simultana normalfördelningen, med argumenten $z_1 = F_{Z_1}^{-1}(u_1)$ och $z_2 = F_{Z_2}^{-1}(u_2)$ återger den simultana fördelningen för $U_1 \sim Lik(0,1)$ och $U_2 \sim Lik(0,1)$ (se sidan 65 för en härledning).

$$F_{Z_1,Z_2}\left(F_{Z_1}^{-1}(u_1), F_{Z_2}^{-1}(u_2); \delta\right) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \qquad (49)$$

[25] Angus, E. John (1994): The probability integral transform and related results. SIAM Review, Volym 36, Nummer 4. S. 652–654.

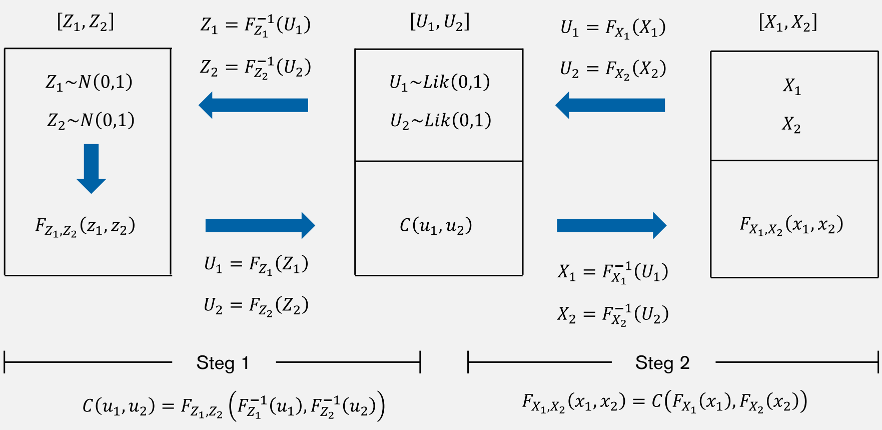
Den resulterande fördelningsfunktionen i samband (49) utgör en implicit copulafunktion, $C(u_1, u_2; \delta)$, där δ ger uttryck för copulans beroendeparameter. Att det handlar om en implicit copulafunktion kommer utav att den ges av en annan simultan fördelningsfunktion – i det här fallet den standardiserade simultana normalfördelningen. Alternativet är en explicit copulafunktion, där copulafunktionen specificeras direkt (utan hänsyn till någon annan känd fördelningsfunktion).

Genom att X_1 och X_2 mappas mot U_1 och U_1 kan observationer, $\left\{x_1^{(t)}\right\}_{t=1}^{T}$ och $\left\{x_2^{(t)}\right\}_{t=1}^{T}$, på X_1 och X_2 användas för att konstruera s.k. pseudo-observationer, $\left\{u_1^{(t)}\right\}_{t=1}^{T}$ och $\left\{u_2^{(t)}\right\}_{t=1}^{T}$, på U_1 och U_2. De kan sedan utnyttjas för estimeringen av den copulafunktion som väljs. I praktiken att bestämma $\hat{\delta}$. För en Gaussisk copulafunktion innebär det att bestämma $\hat{\rho}$ i kovariansmatrisen $\hat{\Sigma}$.

För att slutligen få en simultan fördelning med de marginella fördelningsfunktioner, $F_{X_1}(x_1)$ och $F_{X_2}(x_2)$, som gäller för X_1 och X_2 är det nödvändigt att U_1 och U_2 mappas tillbaka mot X_1 och X_2, med hjälp av $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ och $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$. Den resulterande copulafunktionen, med de marginella fördelningarna $F_{X_1}(x_1)$ och $F_{X_2}(x_2)$ som argument, är angenämt nog lika med den simultana fördelningen för X_1 och X_2 (se sidan 65 för en härledning).[26]

$$C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2); \delta\right) = F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \qquad (50)$$

Figur 7 Den implicita Copulafunktionen



[26] Om steg 1 och steg 2 i figur 7 i stället studeras i ett enda steg gäller att den simultana fördelningsfunktionen för X_1 och X_2 uttrycks som $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F_{Z_1,Z_2}\left(F_{Z_1}^{-1}\left(F_{X_1}(x_1)\right), F_{Z_1}^{-1}\left(F_{X_2}(x_2)\right)\right)$.

7 Skattningar av modellens parametrar

Merparten av det praktiska arbetet med en portföljmodell handlar om att bestämma modellens parametrar. Dels att välja data, dels att estimera parametrarna utifrån de data som valts.

I tabell 5 presenteras en sammanställning av de parametrar som ingår i den valda modellen och de uppgifter som behövs för att bestämma parametrarnas värden.

Tabell 5 Sammanställning av portföljmodellens parametrar och statistiska mått

Engagemangsspecifika parametrar och mått
Exponering (EAD)
▪ Det aktuella garanti- eller lånebeloppet
Den förväntade sannolikheten för fallissemang (p_i)
▪ Genomsnittlig fallissemangsfrekvens baserad på rating
Betafördelningens formparametrar avseende återvinningsgraden givet fallissemang för olika prioritetsklasser (γ_f och ϵ_f)
▪ Genomsnittlig återvinningsgrad givet fallissemang baserad på prioritet
▪ Variansen i återvinningsgraden givet fallissemang baserad på prioritet
Portföljbaserade parametrar och mått
Varje sektorbaserad bakgrundsfaktors form- och skalparameter (α_k^* och β_k)
▪ Variansen i den normerade fallissemangsfrekvensen i respektive sektor
▪ Kovariansen mellan den normerade fallissemangsfrekvensen i olika sektorer
Copulafunktionens beroendeparameter (ρ)
• Korrelationskoefficienten mellan den genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i ekonomin i stort och den genomsnittliga återvinningsgraden givet fallissemang i ekonomin i stort
De enskilda garanti- och låntagarnas faktorvikter ($w_{i,k}$)

7.1 Garanti- och lånebeloppen

De enskilda garanti- och lånebeloppen i portföljmodellen utgår ifrån de uppgifter som varje garanti- och utlåningsmyndighet sammanställer som underlag till årsredovisningen för staten (ÅRS).

7.2 Förväntade sannolikheter för fallissemang

För varje enskild garanti- och låntagare estimeras den i modellen *förväntade* sannolikheten för fallissemang genom att studera genomsnittliga fallissemangsfrekvenser (”Default rates” på engelska) för olika ratingkategorier.[27] Estimaten matchas sedan mot den kreditvärdighetsbedömning som ansvarig myndighet gjort i samband med att den förväntade förlusten beräknats till respektive myndighets bokslut.

Ideala fallissemangsfrekvenser

Det är i sammanhanget viktigt att skattade sannolikheter för fallissemang som är baserade på ratings upprätthåller den kreditvärdighetsskala som de olika ratingkategorierna avser att återge. Om inte denna ordning gäller ger det upphov till orimligheter i beräkningen av både förväntade- och oförväntade förluster.

Problematiken brukar främst göra sig gällande för de bästa ratingkategorierna, det vill säga för de garanti- och låntagare som har en mycket god kreditvärdighet. Dels att sannolikheten för fallissemangen skattas till noll (vilken den i realiteten aldrig är), dels att den inbördes rankningen av garanti- och låntagarnas kreditvärdighet inte alltid bevaras.

De uppmärksammade problemen påkallar att estimaten justeras på lämpligt sätt. Här har Riksgälden valt en parametrisk lösning där fallissemangsfrekvenserna utjämnas med hjälp av en exponentialfunktion, den s.k. utjämningsfunktionen.

$$f(r;\ \varepsilon, \tau) = \varepsilon \times e^{-\tau \times r} \tag{51}$$

där ratingen $r \in \{1, \ldots, 20\}$.[28]

Valet av funktionsform motiveras av att sannolikheten för fallissemang tilltar exponentiellt med avtagande kreditvärdighet (eller linjärt med en logaritmisk skala).[29]

Givet den valda utjämningsfunktionen har Riksgälden valt att tillämpa minsta kvadrat-metoden för att anpassa de justerade (utjämnade) fallissemangsfrekvenserna, $dr^*(r) = f(r;\ \varepsilon, \tau)$, till de empiriskt skattade fallissemangsfrekvenserna, $\widehat{dr_r}$.

Att bestämma ideala fallissemangsfrekvenser mynnar därmed ut i följande icke-linjära begränsade optimeringsproblem.

$$\min_{\varepsilon,\tau} f(\varepsilon, \tau) = \sum_{r=1}^{20} \left(\varepsilon \times e^{-\tau \times r} - \widehat{dr_r}\right)^2 \tag{52}$$

där,

---

27 Moody's Investors Service (2016). Moody's Annual Default Study Corporate Default and Recovery Rates 1920-2015. Exhibit 35 – Average Cumulative Issuer-Weighted Global Default Rates by Rating (1983-2015).

28 Antalet ratingkategorier är baserat på Moody's alfanumeriska ratingskala (från Aaa till Ca-C)

29 Bluhm, Christian, Overbeck, Ludger och Wagner, Christoph (2003): An Introduction to Credit Risk Modeling. Chapman & Hall/CRC. S. 193. ISBN 1-58488-326-X.

$0 < \varepsilon < 1$

$\tau > 0$, och

$\sum_{r=1}^{20} dr^*(r) = \sum_{r=1}^{20} \widehat{dr_r}$

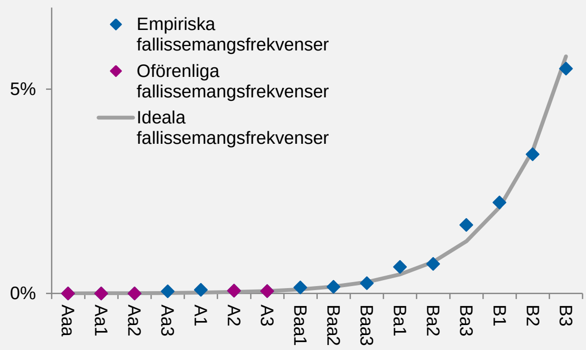
Det sista bivillkoret i minimeringsproblemet begränsar utjämningsproceduren till just relativa justeringar genom att summan av fallissemangsfrekvenserna över samtliga ratingkategorier hålls oförändrad.

Illustration av ideala fallissemangsfrekvenser

I figur 8 nedan illustreras ett exempel på en justering av ett empiriskt underlag till ideala fallissemangsfrekvenser med hjälp av en exponentiell utjämningsfunktion.

För att illustrationen ska bli tydligare har ratingkategorierna Caa1 till Ca-C utelämnats i figuren.

Figur 8 Empiriska och ideala fallissemangsfrekvenser baserade på ratings



7.3 Betafördelningens formparametrar för återvinningsgraden

I ett första steg delas den förväntade återvinningsgraden givet fallissemang, som ansvarig myndighet bedömt för enskilda garantier och lån i portföljen, upp i tre kategorier:

- Hög förväntad återvinningsgrad givet fallissemang, motsvarande en *säkerställd* fordran
- Normal förväntad återvinningsgrad givet fallissemang, motsvarande en *oprioriterad* fordran
- Låg förväntad återvinningsgrad givet fallissemang, motsvarande en *efterställd* fordran

Utifrån denna kategorisering matchas sedan varje garanti och lån mot det genomsnitt och den varians som Moody's använder för olika förmånsrättsliga prioritetsklasser, $f \in \{\text{säkerställd, oprioriterad, efterställd}\}$, när de gör kreditvärdighetsbedömningar av strukturerade produkter.[30]

Givet kända värden på den förväntade återvinningsgraden givet fallissemang, $\hat{\mu}_{RR_f}$, och variansen i återvinningsgraden givet fallissemang, $\hat{\sigma}^2_{RR_f}$, för respektive kategori, f, fås med hjälp av samband (45) och (46) på sidan 41 skattade värden på respektive formparameter, $\hat{\gamma}_f$ och $\hat{\epsilon}_f$.

7.4 Den sammansatta gammafördelningens form- och skalparameter för respektive sektor

Som framgår av samband (37) och (38) på sidan 38 beror varje sektorbaserad bakgrundsfaktors formparameter och skalparameter på variansen i bakgrundsfaktorn för den aktuella sektorn, σ_k^2, och motsvarande varians i den generella bakgrundsfaktorn, $\bar{\sigma}^2$.

Variansen i den normerade fallissemangsfrekvensen i respektive sektor

Varje sektor i modellen likställs med en bransch i enlighet med den branschklassificering som Morgan Stanley Capital International (MSCI) och Standard and Poor's tagit fram.[31] Att sektoranalysen är begränsad till enbart branscher, och därmed utelämnar geografiska aspekter, har sin förklaring i brist på data.

[30] Moody's Investors Service (2015). Moody's Approach to Rating Corporate Synthetic Collateralized Debt Obligations. Exhibit 3: Mean and Standard Deviation Assumptions by Asset Type, Seniority and Security.

[31] MSCI och S&P Capital IQ (2014). GICS® Global Industry Classification Standard.

För respektive sektor, k, studeras en tidsserie med T stycken observationer av den genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i sektorn, $\{x_k{}^{(t)}\}_{t=1}^{T}$.[32] Baserat på dessa data görs sedan punktskattningar av den genomsnittliga fallissemangsfrekvensens väntevärde och varians i respektive sektor med hjälp av stickprovsmedelvärdet, $\bar{x}_k$, och stickprovsvariansen, $\bar{s}_k{}^2$.

$$\hat{\mu}_{X_k} = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_k{}^{(t)}}{T} = \bar{x}_k \tag{53}$$

$$\hat{\sigma}_{X_k}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(x_k{}^{(t)} - \bar{x}_k\right)^2 = \bar{s}_k{}^2 \tag{54}$$

Med hänsyn till normeringen i modellen, $S_k = \frac{X_k}{E(X_k)}$, bestäms sedan variansen i varje sektorspecifik bakgrundsfaktor på följande sätt.[33]

$$\hat{\sigma}_{S_k}^2 = \frac{1}{\hat{\mu}_{X_k}{}^2} \times \hat{\sigma}_{X_k}^2 \tag{55}$$

Den valda skattningsmetoden, att skatta varje bakgrundsfaktors varians direkt utifrån sektorbaserade data, skiljer sig från standardförfarandet. I det senare fallet görs i stället en indirekt skattning, utifrån variansen i fallissemangsfrekvensen för respektive enskild garanti- och låntagare i portföljen som tillhör sektorn i fråga (till exempel som ett viktat medelvärde). Enligt Riksgälden är emellertid det sektorbaserade angrepssättet att föredra. En uppenbar svaghet med standardförfarandet är nämligen att det blir garanti- och låntagarnas kreditvärdighet som avgör volatiliteten i sektorn, inte sektorns karakteristiska drag och egenskaper. Det medför att skattningen blir känslig för hur representativt det specifika urvalet av enskilda garantier och lån i portföljen som tillhör sektorn är för sektorn i sin helhet.

Kovariansmatrisen

De sektorspecifika bakgrundsfaktorernas kovarianser, $Cov(S_k, S_l)$ återges av kovariansmatrisen, $\sum$.

$$\sum = \begin{bmatrix} Var(S_1) & \cdots & Cov(S_1, S_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(S_m, S_1) & \cdots & Var(S_m) \end{bmatrix} \tag{56}$$

---

[32] Standard & Poor's (2015). CreditPro® - Custom table for Riksgäldskontoret (Swedish National Debt Office).

[33] $Var(a \times X) = a^2 \times Var(X)$.

Punktskattningar av elementen i kovariansmatrisens diagonal ges av skattningen i samband (55). De icke-diagonala elementen i kovariansmatrisen skattas i sin tur med hjälp av stickprovskovariansen, $\bar{c}_{k,l}$,

$$\hat{\sigma}(X_k, X_l) = \frac{\sum_{t=1}^{T}({x_k}^{(t)} - \bar{x}_k)({x_l}^{(t)} - \bar{x}_l)}{(T-1)} = \bar{c}_{k,l} \tag{57}$$

samt följande normering.

$$\hat{\sigma}(S_k, S_l) = \frac{\hat{\sigma}(X_k, X_l)}{\sqrt{{\hat{\mu}_{X_k}}^2 \times {\hat{\mu}_{X_l}}^2}} \tag{58}$$

Sammantaget erhålls sedan den skattade kovariansmatrisen.

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{S_1}^2 & \cdots & \hat{\sigma}(S_1, S_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}(S_m, S_1) & \cdots & \hat{\sigma}_{S_m}^2 \end{bmatrix} \tag{59}$$

I enlighet med den sammansatta gammamodellen (se sidan 36–38) gäller dock att samvariationen mellan olika sektorer i modellen är homogen (se samband (40) på sidan 38).

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}^2 & \cdots & \bar{\sigma}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\sigma}^2 & \cdots & \bar{\sigma}^2 \end{bmatrix} \tag{60}$$

I och med att den homogena kovariansmatrisen (som ges av modellen) och den empiriska kovariansmatrisen (som ges av datat) ger utryck för samma sak kan kännedomen om den sistnämnda användas för att skatta den förstnämnda.

Minsta-kvadrat metoden för att bestämma modellens parametrar

Givet kännedom om den empiriskt skattade kovariansmatrisen, $\hat{\Sigma}$, och de villkor som gäller för den sammansatta gammamodellen, har Riksgälden valt att skatta α_k^*, β_k och $\bar{\sigma}^2$ med hjälp av minsta-kvadrat metoden. Det innebär att bestämma den i modellen homogena, och därmed förenklade, kovariansmatris, $\bar{\Sigma}$, som stämmer bäst överrens med den empiriska kovariansmatrisen, $\hat{\Sigma}$.

Förfarandet mynnar ut i följande icke-linjära begränsade minimeringsproblem.

$$\min_{\beta_k, \bar{\sigma}^2} \sum_{k=1}^{m} [\hat{\sigma}_k^2 - (\beta_k + \bar{\sigma}^2)]^2 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} [\hat{\sigma}(S_k, S_l) - \bar{\sigma}^2]^2 \tag{61}$$

där,

$\alpha_k^* \times \beta_k = 1$

$\beta_k + \bar{\sigma}^2 = \sigma_k^2$

$\beta_k > 0$

Den första kvadrattermen, $[\hat{\sigma}_k^2 - (\beta_k + \bar{\sigma}^2)]^2$, avser skillnaden mellan de empiriska och modellerade elementen i kovariansens diagonal, medan den andra kvadrattermen, $[\hat{\sigma}(S_k, S_l) - \bar{\sigma}^2]^2$, avser motsvarande differens för de icke-diagonala elementen i kovariansmatrisen.

Sammanfattningsvis medför valet av data och skattningsmetod att graden av systematisk risk i modellen beror på hur stark samvariation som föreligger mellan de sektorer som portföljen är exponerad mot.

7.5 De enskilda garanti- och låntagarnas faktorvikter

Respektive garanti- och låntagares faktorvikter bestäms i enlighet med den valda fundamentalansatsen (se sidan 35–36).

I ett specialfall gäller emellertid ett viktigt undantag. När det finns utestående garantier där det inträffat ett fallissemang *men* att statens garantiåtagande ännu inte har infriats sätts faktorvikten lika med noll. I de fallen gäller nämligen att fallissemang är en säker händelse (100 procents sannolikhet), där det således inte finns utrymme för någon variation i sannolikheten för att det ska ske.

7.6 Copulafunktionens beroendeparameter

Utifrån valet av en Gaussisk copulafunktion för att formalisera beroendestrukturen mellan fallissemangsfrekvensen i ekonomin i stort, $\overline{DR}$, och återvinningsgraden givet fallissemang i ekonomin i stort, $\overline{RR}$, behövs en skattningsmetod för att bestämma styrkan i beroendet. I praktiken att estimera korrelationskoefficienten ρ.

Här har Riksgälden valt att göra en semi-parametrisk skattning med hjälp av CML-metoden (vilket är en förkortning av ”Canonical Maximum Likelihood” på engelska). Det är en metod som innebär att skattningen av de marginella fördelningarna och copulafunktionens beroendeparameter utförs var för sig, i enlighet med följande sekvens:

1. Först utförs en icke-parametrisk skattning av respektive marginell fördelningsfunktion för att med hjälp av dem konstruera ett stickprov med pseudo-observationer från copulafunktionens likformigt fördelade (marginella) slumpvariabler.

2. Baserat på de konstruerade pseudo-observationerna i det första steget estimeras sedan copulafunktionen parametriskt med hjälp av Maximum likelihood-metoden (ML-metoden).

Skattning av de marginella fördelningsfunktionerna

För att kunna konstruera ett stickprov med pseudo-observationer, $\{u^{(t)}\}_{t=1}^{T}$ och $\{v^{(t)}\}_{t=1}^{T}$, från de konstruerade slumpvariablerna $U = F_{\overline{RR}}(\overline{RR})$ och $V = F_{\overline{DR}}(\overline{DR})$, behövs en *kontinuerlig* framställning av de marginella fördelningsfunktionerna $F_{\overline{DR}}(\overline{dr})$ och $F_{\overline{RR}}(\overline{rr})$. De kan bestämmas på olika sätt, antingen parametriskt eller icke-parametriskt. Eftersom det i sammanhanget endast är beroendet mellan fallissemangsfrekvensen och återvinningsgraden givet fallissemang som är av intresse görs inget antagande om vilken (parametrisk) fördelning som $\overline{DR}$ respektive $\overline{RR}$ tillhör. I stället skattas varje marginell fördelningsfunktion, $\hat{F}_{\overline{DR}}(\overline{dr})$ och $\hat{F}_{\overline{RR}}(\overline{rr})$, direkt från observerade tidsserier med genomsnittliga fallissemangsfrekvenser för ekonomin i stort, $\{\overline{dr}^{(t)}\}_{t=1}^{T}$, och genomsnittliga återvinningsgrader givet fallissemang för ekonomin i stort, $\{\overline{rr}^{(t)}\}_{t=1}^{T}$. Respektive skattning utförs hjälp av en s.k. Kernelskattning ("Kernel Density Estimation" på engelska) av respektive täthetsfunktion, $\hat{f}_{\overline{DR}}(\overline{dr})$ och $\hat{f}_{\overline{RR}}(\overline{rr})$.

$$\hat{f}_Y(y) = \frac{1}{N \times h} \sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{y_i - y}{h}\right) \tag{62}$$

där,

- K står för den s.k. Kernelfunktionen
- y_i är den i:te observationen av totalt N stycken observationer i stickprovet $\{y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}$
- y är ett värde i utfallsrummet för den kontinuerliga slumpvariabeln Y (där Y kan vara vilken slumpvariabel som helst)
- h utgör en utjämningsparameter

Vad det gäller slumpvariablerna $\overline{DR}$ och $\overline{RR}$ har Riksgälden valt en standardiserad Gaussisk Kernelfunktion för att bestämma en empirisk skattning av respektive täthetsfunktion.

$$K\left(\frac{y_i - y}{h}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - y}{h}\right)^2} \tag{63}$$

Det ska i sammanhanget understrykas att valet av Kernelfunktion inte innebär något antagande om att någon av de (marginella) slumpvariabler är normalfördelade. Valet av Kernelfunktion har heller ingen koppling till den Gaussiska copulafunktionen.

Vidare gäller att,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{y_i - y}{h}\right) dy = 1 \tag{64}$$

där fördelningsfunktionen, $\hat{F}_Y(y)$, bestäms på sedvanligt vis.

$$\hat{F}_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \hat{f}_Y(s)\, ds \tag{65}$$

Utifrån tillgängliga tidsserier och de marginella fördelningsfunktionerna kan konstruerade pseudo-observationer sedan beräknas med hjälp av följande samband.

$$\hat{u}^{(t)} = \hat{F}_{\overline{DR}}\left(\overline{dr}^{(t)}\right) \tag{66}$$

$$\hat{v}^{(t)} = \hat{F}_{\overline{RR}}\left(\overline{rr}^{(t)}\right) \tag{67}$$

Maximum likelihood-skattning av copulafunktionen

Med tillgång till ett stickprov med slumpmässiga och oberoende pseudo-observationer från de konstruerade slumpvariablerna $U \sim Lik(0,1)$ och $V \sim Lik(0,1)$ är det möjligt att estimera en Gaussisk copulafunktions beroendeparameter, i form av korrelationskoefficienten ρ, med hjälp av ML-metoden.[34]

Det innebär att söka det värde på ρ som givet en Gaussisk copulafunktion ger störst chans att återge de pseudo-stickprov som konstruerats. Eller med andra ord, att maximera följande likelihood-funktion.

$$L(\rho) = \prod_{t=1}^{T} c\left(\hat{u}^{(t)}, \hat{v}^{(t)}; \rho\right) \tag{68}$$

där $c(u, v; \rho)$ är den bivariata täthetsfunktionen för de konstruerade slumpvariablerna U och V.

Som alltid är det fördelaktigt att studera den logaritmerade likelihood-funktionen, $l(\rho)$, då den har samma maximum som $L(\rho)$ men är enklare att derivera.

$$l(\rho) = \sum_{t=1}^{T} \ln c\left(\hat{u}^{(t)}, \hat{v}^{(t)}; \rho\right) \tag{69}$$

[34] För en kortfattad beskrivning av ML-metoden se Blom, Gunnar och Holmquist, Björn (1998): Sannolikhetsteori med tillämpningar B. Studentlitteratur. Lund. S. 62–64. ISBN 91-44-00323-4.

Med hjälp av log-likelihood-funktionen mynnar uppgiften att estimera beroendeparametern ρ ut i följande maximeringsproblem.

$$\hat{\rho} = \arg\max_{\rho} \sum_{t=1}^{T} \ln c\left(\hat{u}^{(t)}, \hat{v}^{(t)}; \rho\right) \tag{70}$$

Med hänvisning till täthetsfunktionen för en Gaussisk copulafunktion (se samband (48) på sidan 42) resulterar maximeringsproblemet i samband (70) i följande uttryck.

$$\hat{\rho} = \arg\max_{\rho} \left[-\frac{T}{2}\ln(1-\rho^2) - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \right. \tag{71}$$

$$\left. \sum_{t=1}^{T} \Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right)^2 - 2\rho\Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right) \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right) + \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)^2 + \frac{\Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right)^2}{2} + \frac{\Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)^2}{2}\right]$$

Lösningen till maximeringsproblemet i samband (71) fås genom att bestämma det värde på beroendeparametern ρ där log-likelihood-funktionens derivata, $\frac{\partial l(\rho)}{\partial \rho}$, är lika med noll, vilket mynnar ut i följande ekvation (se sidan 66–67 för en härledning).[35]

$$\frac{\partial l(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\rho T}{(1-\rho^2)} - \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \times \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{3\rho}{2} \times \Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right)^2 - (1+\rho^2) \times \Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right) \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{3\rho}{2} \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)^2\right] = 0 \tag{72}$$

Det finns emellertid ingen analytisk lösning till ekvationen i samband (72). Det skattade värdet $\hat{\rho}$ bestäms i stället numeriskt.

7.7 Justering av modellens parametrar för en flerårig tidshorisont

I den samlade riskanalysen beräknas oförväntade förluster för både en ett- och treårig tidshorisont. I det senare fallet innebär det att modellens parametrar behöver justeras. Det sektorbaserade data som Riksgälden använder är nämligen begränsade till en ettårig tidshorisont.

Justeringen av modellens parametrar utförs genom extrapolering av det ettåriga datat, baserat på förenklade antaganden. Förfarandet innebär således en teknisk nödlösning.

[35] Därutöver bör man säkerställa att lösningen till ekvationen är just ett maximum, och inte ett minimum, genom att kontrollera att andra derivatan är mindre än noll, $\frac{\partial^2 l(\rho)}{\partial \rho^2} < 0$.

Den förväntade sannolikheten för fallissemang

För enskilda garanti- och låntagares förväntade fallissemangssannolikhet studeras den *kumulativa* genomsnittliga fallissemangsfrekvensen för en treårig tidshorisont baserad på rating, $\widehat{dr_r}(3)$.

Estimaten för en treårig tidshorisont idealiseras sedan på samma sätt som de ettåriga fallissemangsfrekvenserna (se sidan 46–47).

Normerade fallissemangsfrekvenser i respektive sektor

De tidsserier med genomsnittliga fallissemangsfrekvenser för respektive sektor som Riksgälden har tillgång till är begränsade till observationer på årsbasis. Utifrån denna förutsättning har Riksgälden valt att justera respektive bakgrundsfaktor direkt med hänsyn till en treårig tidshorisont.

Antag att den genomsnittliga fallissemangs-frekvensen i varje sektor på årsbasis, $X_k(1)$, följer en slumpmässig sekvens som sträcker sig över tre år, $\left\{X_k^{(1)}(1), X_k^{(2)}(1), X_k^{(3)}(1)\right\}$, där respektive slumpvariabel är oberoende och likafördelad.

Antag vidare att den stokastiska processen är stationär, vilket innebär att varje slumpvariabel har samma väntevärde och varians.

$$E\left[X_k^{(t)}(1)\right] = E[X_k(1)] \qquad (73)$$

$$Var\left[X_k^{(t)}(1)\right] = Var[X_k(1)] \qquad (74)$$

Givet de förenklade antaganden som gjorts gäller följande väntevärde och varians för den normerade genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i varje sektor för en treårig tidshorisont.

$$E[S_k(3)] = E\left[\frac{X_k^{(1)}(1)+X_k^{(2)}(1)+X_k^{(3)}(1)}{E\left(X_k^{(1)}(1)+X_k^{(2)}(1)+X_k^{(3)}(1)\right)}\right] = \frac{1}{3 \times E[X_k(1)]} \times [3 \times E(X_k(1))] = 1 \qquad (75)$$

$$Var[S_k(3)] = Var\left[\frac{X_k^{(1)}(1)+X_k^{(2)}(1)+X_k^{(3)}(1)}{E\left(X_k^{(1)}(1)+X_k^{(2)}(1)+X_k^{(3)}(1)\right)}\right] = \frac{[3 \times Var(X_k(1))]}{[3 \times E(X_k(1))]^2} = \frac{Var[X_k(1)]}{3 \times E[X_k(1)]^2} \qquad (76)$$

Med hjälp av de antaganden och förenklingar som gjorts kan estimaten $\hat{\mu}_{S_k}(3)$ och $\hat{\sigma}^2_{S_k}(3)$ bestämmas med hjälp av $\hat{\mu}_{S_k}(1)$ och $\hat{\sigma}^2_{S_k}(1)$.

Kovariansen

I nästa steg görs en ytterligare förenkling i och med ett antagande om att korrelationen mellan de sektorspecifika bakgrundsfaktorerna är tidsindifferent. Eller med andra ord, att den inte påverkas av längden på tidshorisonten.

$$\rho[S_k(3), S_l(3)] = \rho[S_k(1), S_l(1)] \tag{77}$$

Detta förenklade antagande, tillsammans med samband (76), innebär i sin tur följande uttryck för kovariansen mellan olika sektorer i modellen.

$$Cov[S_k(3), S_l(3)] = \rho[S_k(1), S_l(1)] \times \sqrt{Var[S_k(3)]} \times \sqrt{Var[S_l(3)]} \tag{78}$$

Givet gjorda förenklingar och kännedom om $\hat{\rho}[S_k(1), S_l(1)]$ är det således möjligt att skatta $\hat{\sigma}[S_k(3), S_l(3)]$.

Återvinningsgraden givet fallissemang

Återvinningsgraden givet fallissemang är en parameter som inte har någon koppling till längden på den framåtblickande tidshorisonten i analysen.

Samvariationen mellan fallissemang och återvinningsgrad

Även i detta fall görs ett förenklat antagande om att samvariationen är tidsindifferent. Det innebär att copulafunktionens beroendeparameter för en treårig tidshorisont antas vara densamma som för en ettårig tidshorisont.

Exempel på simulerade portföljförluster

Antag en portfölj med fyra stycken lån, där tre av lånen är på 5 miljoner kronor och det fjärde lånet på 10 miljoner kronor. Låntagarna i portföljen är exponerade mot två olika sektorer, sektor A och B, där sektor B är mer riskfylld än sektor A. Låntagare 1 och 2 är unikt knutna till sektor A, medan låntagare 3 och 4 är unikt knutna till sektor B. Vidare gäller att det första lånet har säkerhet och utgör därmed en säkerställd fordran (SF) medan resten av lånen utgör oprioriterade fordringar (OF).

I tabell 6 nedan redogörs för de enskilda lånens belopp, (förväntad) sannolikhet för fallissemang, exponering mot respektive sektor samt förväntad återvinningsgrad givet fallissemang och standardavvikelsen i återvinningsgraden givet fallissemang.

Tabell 6 Engagemangsspecifika parametrar

	Exponering	Sannolikhet för fallissemang	Faktorvikter			Återvinningsgrad givet fallissemang	
			Sektor A	Sektor B	Residualen	Genomsnitt	Standardavvikelse
Lån 1	5	4 %	100 %	0 %	0 %	60 %	25 %
Lån 2	5	7 %	100 %	0 %	0 %	35 %	30 %
Lån 3	5	1 %	0 %	100 %	0 %	35 %	30 %
Lån 4	10	5 %	0 %	100 %	0 %	35 %	30 %

I exemplet nedan redogörs för 10 stycken simulerade scenarion.

I ett första steg simuleras korrelerade utfall (u, v) från de konstruerade slumpvariablerna U och V, som uttryck för beroendet mellan den genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i ekonomin i stort och den genomsnittliga återvinningsgraden i ekonomin i stort. *Givet* u beräknas ett utfall, q, på den generella bakgrundsfaktorn, som uttryck för den allmänna ekonomiska utvecklingen. *Givet* v utförs i ett senare moment motsvarande beräkningar av utfall på återvinningsgraden givet fallissemang för lånen.

Tabell 7 Utfall för ekonomin i stort

Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(u, v)	0,9;0,4	0,8;0,3	0,4;0,9	0,9;0,2	0,4;0,6	0,6;0,4	0,3;0,3	0,9;0,6	0,9;0,1	0,2;0,7
q	1,8	1,5	0,6	2,0	0,7	1,1	0,6	2,1	3,9	0,3

Givet utfallet, q, på den generella bakgrundsfaktorn fås en förväntad fallissemangsfrekvens i respektive sektor som speglar den allmänna ekonomiska utvecklingen. Utifrån denna förutsättning simuleras sedan den betingade (normerade) genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i respektive sektor. Ett utfall större än 1 symboliserar en nedgång i sektorn, medan ett utfall mindre än 1 speglar en uppgång.

Tabell 8 Sektoranalys

Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sektorspecifika förutsättningar										
$E(S_A \mid Q = q)$	1,8	1,5	0,6	2,0	0,7	1,1	0,6	2,1	3,9	0,3
$E(S_B \mid Q = q)$	1,8	1,5	0,6	2,0	0,7	1,1	0,6	2,1	3,9	0,3
Sektorspecifika utfall										
$s_A \mid Q = q$	1,8	1,5	0,6	1,9	0,7	1,1	0,6	2,1	3,9	0,3
$s_B \mid Q = q$	5,3	2,5	0,3	2,4	0,1	1,1	0,8	6,0	2,9	0,2

I nästa steg beräknas *betingade* sannolikheter för fallissemang som en funktion av utfallen på den (normerade) genomsnittliga fallissemangsfrekvensen i respektive sektor.

Tabell 9 Låntagarnas betingade fallissemangssannolikhet

Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_1(s_A)$	7,2 %	6,1 %	2,6 %	7,6 %	2,6 %	4,3 %	2,3 %	8,3 %	15,6 %	1,2 %
$p_2(s_A)$	12,6 %	10,7 %	4,5 %	13,4 %	4,6 %	7,5 %	4,2 %	14,4 %	27,2 %	2,1 %
$p_3(s_B)$	5,3 %	2,5 %	0,3 %	2,4 %	0,1 %	1,1 %	0,8 %	6,0 %	2,9 %	0,2 %
$p_4(s_B)$	26,5 %	12,7 %	1,5 %	11,9 %	0,7 %	5,6 %	3,9 %	30,2 %	14,4 %	1,0 %

Utifrån de betingade förutsättningarna i varje scenario beräknas sedan olika utfall för respektive lån; fallissemang eller ej fallissemang (0 eller 1), återvinningsgraden givet fallissemang (givet utfallet på v i det första steget) och den resulterande nettoförlusten.

Tabell 10 Utfall för enskilda lån

Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fallissemang eller ej fallissemang										
D_1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
D_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
Återvinningsgraden givet fallissemang										
$rr_1^{(SF)}$	(55,0 %)	(44,3 %)	(92,1 %)	(38,2 %)	(69,5 %)	56,0 %	(46,5 %)	(70,2 %)	(26,7 %)	(75,3 %)
$rr_2^{(OF)}$	18,6 %	(9,6 %)	(82,8 %)	(6,1 %)	(37,6 %)	(19,7 %)	(19,7 %)	(38,7 %)	(20,0 %)	(47,4 %)
$rr_3^{(OF)}$	(18,6 %)	(9,6 %)	(82,8 %)	(6,1 %)	(37,6 %)	(19,7 %)	(19,7 %)	(38,7 %)	(20,0 %)	(47,4 %)
$rr_4^{(OF)}$	(18,6 %)	(9,6 %)	(82,8 %)	(6,1 %)	(37,6 %)	19,7 %	(19,7 %)	38,7 %	(20,0 %)	(47,4 %)
Nettoförlust										
L_1	-	-	-	-	-	2,2	-	-	-	-
L_2	4,1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
L_3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
L_4	-	-	-	-	-	8,0	-	6,1	-	-

Slutligen beräknas slutligen den samlade portföljförlusten.

Tabell 11 Samlade portföljförluster

Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_{PF}	4,1	0,0	0,0	0,0	0,0	10,2	0,0	6,1	0,0	0,0

Appendix

I detta appendix presenteras härledningar för ett urval av samband och resultat som är betydelsefulla i utformningen av den valda portföljmodellen.

Standardavvikelsen för produkten av två oberoende slumpvariabler

Standardavvikelsen avseende produkten av två oberoende slumpvariabler, X och Y – en generell notation som uttryck för vilka slumpvariabler som helst – kan härledas med utgångspunkt i definitionen av variansen i det univariata fallet.

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (79)$$

Definitionen av variansen för en produkt av två oberoende slumpvariabler kan utryckas på motsvarande sätt.

$$Var(X \times Y) = E[(X \times Y)^2] - E[X \times Y]^2 = E(X^2) \times E(Y^2) - E(X)^2 \times E(Y)^2 \quad (80)$$

I ett algebraiskt mellansteg läggs termen $E(X)^2 \times E(Y)^2$ till sambandet och dras ifrån samtidigt (vilket innebär att samband (80) är oförändrat).

$$Var(X \times Y) = [E(X^2) \times E(Y^2) - E(X)^2 \times E(Y)^2] + [E(X)^2 \times E(Y^2) - E(X)^2 \times E(Y)^2] \quad (81)$$

I och med den algebraiska omskrivningen i samband (81) kan termerna $E(Y^2)$ och $E(X)^2$ brytas ut.

$$Var(X \times Y) = [E(X^2) - E(X)^2] \times E(Y^2) + [E(Y^2) - E(Y)^2] \times E(X)^2 \quad (82)$$

Samband (82) kan sedan förenklas med hjälp av definitionen av variansen i samband (79).

$$Var(X \times Y) = Var(X) \times E(Y^2) + Var(Y) \times E(X)^2 \quad (83)$$

Eftersom termen $Var(X) \times E(Y^2)$ är av andra ordningens moment är det fördelaktigt att utveckla samband (83) ytterligare (för att få ett ännu enklare uttryck).

Genom att ännu en gång utnyttja definitionen av variansen inses att hjälputtrycket,

$$Var(X) \times Var(Y) = \quad (84)$$

$$[E(X^2) - E(X)^2] \times [E(Y^2) - E(Y)^2]$$

angenämnt nog kan skrivas om på ett ändamålsenligt sätt.

$$Var(X) \times Var(Y) = [E(X^2) - E(X)^2] \times [E(Y^2) - E(Y)^2] \tag{85}$$

Genom att sedan ersätta $Var(X) \times E(Y^2)$ med $Var(X) \times Var(Y) + Var(X) \times E(Y^2)$ i samband (83) så finns inte längre någon term av andra ordningens moment. Det som blir kvar är endast kvadratiska potenser och därmed ett mer lätthanterligt uttryck.

$$Var(X \times Y) = Var(X) \times Var(Y) + Var(X) \times E(Y^2) + Var(Y) \times E(X)^2 \tag{86}$$

Parvisa fallissemangskorrelationer

I enlighet med definitionen av en korrelationskoefficient, ρ, gäller följande uttryck för den parvisa korrelationen mellan två indikatorvariabler.

$$\rho\left(D_i, D_j\right) = \frac{Cov(D_i, D_j)}{S(D_i) \times S(D_j)} = \frac{E\left(D_i \times D_j\right) - E(D_i) \times E\left(D_j\right)}{\sqrt{Var(D_i)} \times \sqrt{Var(D_j)}} \tag{87}$$

Med hänsyn till att varje enskild fallissemangssannolikhet är en funktion av den gemensamma bakgrundsvariabeln X kan termerna i uttrycket utvecklas på följande vis.

Analogt med härledningen i samband (16) på sidan 21 gäller att $E(D_i)$, och motsvarande term $E(D_j)$, ges av följande uttryck.

$$E(D_i) = E_X[E(D_i \mid X)] = E[p_i(X)] \tag{88}$$

Resultatet i samband (88) tillsammans med antagandet om betingat oberoende möjliggör följande omskrivning av termen $E\left(D_i \times D_j\right)$.

$$E\left(D_i \times D_j\right) = E_X\left[E(D_i \mid X) \times E\left(D_j \mid X\right)\right] = E\left[p_i(X) \times p_j(X)\right] \tag{89}$$

Med stöd av definitionen $Var(D_i) = E\left({D_i}^2\right) - E(D_i)^2$ kan slutligen variansen för respektive indikatorvariabel utvecklas.

$$Var(D_i) = E_X[E(D_i \mid X)^2] - E[E(D_i \mid X)]^2 = \tag{90}$$

$$E[1^2 \times P(D = 1 \mid X) + 0^2 \times P(D = 0 \mid X)] - E[E(D_i \mid X)]^2 =$$

$$E[p_i(X)] - E[p_i(X)]^2 = E[p_i(X)] \times (1 - E[p_i(X)])$$

Utvecklingen av de termer som redogjorts för resulterar i följande generella uttryck för den parvisa fallissemangkorrelationen mellan två garanti- eller låntagare i en garanti- och utlåningsportfölj.

$$\rho\left(D_i, D_j\right) = \frac{E\left[p_i(X) \times p_j(X)\right] - E\left[p_i(X)\right] \times E\left[p_j(X)\right]}{\sqrt{E\left[p_i(X)\right] \times \left(1 - E\left[p_i(X)\right]\right)} \times \sqrt{E\left[p_i(X)\right] \times \left(1 - E\left[p_i(X)\right]\right)}} \tag{91}$$

Parvisa fallissemangskorrelationer för identiska garanti- och låntagare

Antag en portfölj där varje garanti- och låntagares indikatorvariabel har exakt samma egenskaper.

$$D_i = D_j = D \tag{92}$$

Detta innebär i sin tur att,

$$P(D_i = 1) = P(D_j = 1) = p(X) \tag{93}$$

där den gjorda förenklingen möjliggör följande omskrivningar.

$$E\left(D_i \times D_j\right) = E(D^2) = E[p(X)^2] \tag{94}$$

$$E(D_i) \times E\left(D_j\right) = E[D]^2 = E[p(X)]^2 \tag{95}$$

$$S(D_i) \times S\left(D_j\right) = S(D)^2 = Var(D) = \ E[p(x)] \times (1 - E[p(X)]) \tag{96}$$

Därmed kan det generella uttrycket i samband (91) skrivas om på följande sätt.

$$\rho\left(D_i, D_j\right) = \frac{E\left(p(X)^2\right) - E[p(X)]^2}{E[p(x)] \times (1 - E[p(X)])} = \frac{Var[p(X)]}{E[p(x)] \times (1 - E[p(X)])} \tag{97}$$

Gammafördelningens väntevärde och varians

För en gammafördelad slumpvariabel gäller följande uttryck för väntevärdet.

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y \times \frac{y^{\alpha - 1} \times e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)}}{\beta^{\alpha} \times \Gamma(\alpha)} dy \tag{98}$$

där α och β är fördelningens form- respektive skalparameter medan $\Gamma(.)$ ger uttryck för Gammafunktionen.

Genom att utföra multiplikationen med y fås följande omskrivning av integralen i samband (98).

$$E(Y) = \int_0^{\infty} \frac{y^{(\alpha + 1) - 1} \times e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)}}{\beta^{\alpha} \times \Gamma(\alpha)} dy \tag{99}$$

Uttrycket i samband (99) påminner om täthetsfunktionen för en gammafördelning med formparametern $\alpha + 1$ i stället för α, så när på β^{α}och Gammafunktionen i nämnaren.

För att gå vidare förlängs både nämnaren och täljaren med β.

$$E(Y) = \beta \times \int_0^\infty \frac{y^{(\alpha+1)-1} \times e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)}}{\beta^{(\alpha+1)} \times \Gamma(\alpha)} dy \tag{100}$$

I nästa steg utnyttjas att gammafunktionen har följande egenskap.

$$\Gamma(\alpha + n) = (\alpha + n - 1) \times (\alpha + n - 2) \times \ldots \times (\alpha + 1)\alpha\Gamma(\alpha) \tag{101}$$

Genom att förlänga både täljaren och nämnaren med α utnyttjas att $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

$$E(Y) = (\alpha \times \beta) \times \int_0^\infty \frac{y^{(\alpha+1)-1} \times e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)}}{\beta^{(\alpha+1)} \times \Gamma(\alpha+1)} dy = (\alpha \times \beta) \times F_Y(\infty;\ \alpha + 1, \beta) \tag{102}$$

Eftersom fördelningsfunktionen $F_Y(\infty;\ \alpha + 1, \beta)$ är lika med ett fås slutligen följande resultat.

$$E(Y) = \alpha \times \beta \tag{103}$$

Variansen för en gammafördelad slumpvariabel bestäms analogt med hänsyn till termen $E(Y^2)$ i definitionen av variansen, med hjälp av argumentet $\alpha + 2$ i stället för $\alpha + 1$.

$$E(Y^2) = [(\alpha + 1) \times \alpha \times \beta^2] \times \int_0^\infty \frac{y^{(\alpha+2)-1} \times e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)}}{\beta^{(\alpha+2)} \times \Gamma(\alpha+2)} dy \tag{104}$$

Med hänvisning till samband (104) kan $(\alpha + 1) \times \alpha \times \beta^2$ kan skrivas om som $(\alpha \times \beta)^2 + \alpha \times \beta^2$, vilket medför att,

$$E(Y^2) = E(Y)^2 + \alpha \times \beta^2 \tag{105}$$

som med hänsyn till definitionen för variansen ger följande resultat.

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y)^2 + \alpha \times \beta^2 - E(Y)^2 = \alpha \times \beta^2 \tag{106}$$

Sektorfaktorernas väntevärde och varians

Det obetingade väntevärdet för varje bakgrundsfaktor i en sammansatt gammamodell ges av följande samband.

$$E(S_k) = E_Q[E(S_k \mid Q)] \tag{107}$$

Med hänvisning till samband (35) gäller att,

$$E(S_k \mid Q) = \alpha_k \times \beta_k \tag{108}$$

Eftersom formparametern α_k är en linjär funktion av den generella bakgrundsfaktorn Q (se samband (34) på sidan 36) och $E(Q) = 1$ (se samband (32) på sidan 36) fås slutligen följande resultat.

$$E(S_k) = E[(\alpha_k^* \times Q) \times \beta_k] = E(Q) \times (\alpha_k^* \times \beta_k) = \alpha_k^* \times \beta_k \tag{109}$$

Motsvarande uttryck för respektive bakgrundsfaktors obetingade varians utvecklas med utgångspunkt i lagen om total varians.

$$Var(S_k) = E_Q[Var(S_k \mid Q)] + Var_Q[E(S_k \mid Q)] \tag{110}$$

Samband (27) och (28) på sidan 31–32 ger kännedom om,

$$Var(S_k \mid Q) = \alpha_k \times \beta_k^2 \tag{111}$$

$$E(S_k \mid Q) = \alpha_k \times \beta_k \tag{112}$$

vilket med hänvisning till samband (110) medför följande uttryck.

$$Var(S_k) = E[(\alpha_k^* \times Q) \times \beta_k^2] + Var[(\alpha_k^* \times Q) \times \beta_k] \tag{113}$$

Med stöd av att $E(Q) = 1$ (se samband (32) på sidan 36) och $Var(Q) = \bar{\sigma}^2$ (se samband (33) på sidan 36) kan samband (113) utvecklas ett ytterligare steg.

$$Var(S_k) = \alpha_k^* \times \beta_k^2 + \bar{\sigma}^2 \times (\alpha_k^* \times \beta_k)^2 = \beta_k \times E(S_k) + \bar{\sigma}^2 \times E(S_k)^2 \tag{114}$$

Eftersom $E(S_k) = 1$ fås slutligen följande resultat.

$$Var(S_k) = \beta_k + \bar{\sigma}^2 \tag{115}$$

Kovariansen mellan olika sektorfaktorer

Kovariansen mellan olika sektorfaktorer, S_k och S_l, bestäms med hjälp av den grundläggande definitionen.[36]

$$Cov(S_k, S_l) = E_Q[E(S_k \mid Q) \times E(S_l \mid Q)] - E_Q[E(S_k \mid Q)] \times E_Q[E(S_l \mid Q)] \tag{116}$$

Med hänvisning till samband (107) på sidan 62 kan uttrycket i samband (116) utvecklas på följande vis,

$$Cov(S_k, S_l) = E[([\alpha_k^* \times Q] \times \beta_k) \times ([\alpha_l^* \times Q] \times \beta_l)]$$

---

[36] $Cov(X, Y) = E(X \times Y) - E(X) \times E(Y)$.

$$-E[(\alpha_k^* \times Q) \times \beta_k] \times E[(\alpha_l^* \times Q) \times \beta_l] \tag{117}$$

Samband (117) kan sedan vidareutvecklas.

$$Cov(S_k, S_l) = E(Q^2) \times [(\alpha_k^* \times \beta_k) \times (\alpha_l^* \times \beta_l)] -$$

$$[E(Q) \times (\alpha_k^* \times \beta_k)] \times [E(Q) \times (\alpha_k^* \times \beta_k)] \tag{118}$$

Med hjälp av att $E(S_k) = \alpha_k^* \times \beta_k$ och $E(S_l) = \alpha_l^* \times \beta_k$ (se samband (109) på sidan 63) fås,

$$Cov(S_k, S_l) = E(Q^2) \times [E(S_k) \times E(S_l)] - E(Q)^2 \times [E(S_k) \times E(S_l)] \tag{119}$$

där vetskapen om att $E(S_k) = 1$ och $E(S_l) = 1$ gör det möjligt att förenkla sambandet ett steg till.

$$Cov(S_k, S_l) = E(Q^2) - E(Q)^2 = Var(Q) \tag{120}$$

Med hänvisning till att $Var(Q) = \bar{\sigma}^2$ (se samband (33) på sidan 36) innebär det följande resultat.

$$Cov(S_k, S_l) = \bar{\sigma}^2 \tag{121}$$

Betafördelningens väntevärde och varians

Det analytiska uttrycket för en standardiserad betafördelnings väntevärde tas fram på samma sätt som för gammafördelningen (se sidan 61–62). Det innebär att uttrycket,

$$E(Y) = \int_0^1 y \times \frac{y^{\gamma-1} \times (1-y)^{\epsilon-1}}{B(\gamma,\epsilon)} dy \tag{122}$$

kan skrivas om som,

$$E(Y) = \frac{\gamma}{(\gamma+\epsilon)} \times \int_0^1 \frac{y^{(\gamma+1)-1} \times (1-y)^{\epsilon-1}}{B(\gamma+1,\epsilon)} dy = \frac{\gamma}{(\gamma+\epsilon)} \times F_Y(1;\ \gamma+1, \epsilon) \tag{123}$$

genom att utnyttja följande samband mellan Betafunktionen, $B(.)$, och Gammafunktionen, $\Gamma(.)$.

$$B(\gamma, \epsilon) = \frac{\Gamma(\gamma) \times \Gamma(\epsilon)}{\Gamma(\gamma+\epsilon)} \tag{124}$$

Eftersom $F_Y(1;\ \gamma+1, \epsilon)$ är lika med ett erhålls följande resultat.

$$E(Y) = \frac{\gamma}{(\gamma+\epsilon)} \tag{125}$$

Motsvarande uttryck för den standardiserade betafördelningens varians tas fram analogt med hänsyn till termen $E(Y^2)$ i definitionen av variansen,

$$E(Y^2) = \frac{(\gamma+1)\gamma}{(\gamma+1+\epsilon)\times(\gamma+\epsilon)} \times \int_0^1 \frac{y^{(\gamma+2)-1}\times(1-y)^{\epsilon-1}}{B(\gamma+2,\epsilon)} dy \tag{126}$$

vilket leder till följande resultat.

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{(\gamma+1)\times\gamma}{(\gamma+1+\epsilon)\times(\gamma+\epsilon)} - \left(\frac{\gamma}{(\gamma+\epsilon)}\right)^2 = \frac{\gamma\times\epsilon}{(\gamma+1+\epsilon)\times(\gamma+\epsilon)^2} \tag{127}$$

Transformering av fördelningsfunktionen

Antag en kontinuerlig slumpvariabel Y med fördelningsfunktionen $F_Y(y)$, där Y kan tillhöra vilken fördelning som helst. Då gäller att den konstruerade slumpvariabeln $U = F_Y(y)$ tillhör en likformig fördelning i intervallet noll till ett, $U \sim Lik(0,1)$.

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(F_Y(Y) \leq u) = P\left(Y \leq F_Y^{-1}(u)\right) = F_Y\left(F_Y^{-1}(u)\right) = u \tag{128}$$

Resultatet i samband (128) stämmer överens med,

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{för} \quad u < a \\ \frac{u-a}{b-a} & \text{för} \quad \in [a,b) \\ 1 & \text{för} \quad u \geq b \end{cases} \tag{129}$$

vilket för $a = 0$ och $b = 1$ är lika med just u.

Copulafunktionen

En simultan fördelningsfunktion, $F_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)$, med argumenten $F_{Z_1}^{-1}(u_1)$ och $F_{Z_2}^{-1}(u_2)$ utgör en copulafunktion, vilken i sig är en simultan fördelningsfunktion för U_1 och U_2 (vilka tillhör en likformig fördelning på intervallet noll till ett).

$$F_{Z_1,Z_2}\left(F_{Z_1}^{-1}(u_1), F_{Z_1}^{-1}(u_1); \delta\right) = P\left(Z_1 \leq F_{Z_1}^{-1}(u_1), Z_2 \leq F_{Z_2}^{-1}(u_2)\right) = \tag{130}$$

$$P\left(U_1 \leq F_{Z_1}(z_1), U_2 \leq F_{Z_2}(z_2)\right) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

En copulafunktion, $C(u_1,u_2;\delta)$, med argumenten $F_{X_1}(x_1)$ och $F_{X_2}(x_2)$ återger i sin tur den simultana fördelningen för X_1 och X_2.

$$C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2); \delta\right) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) = \tag{131}$$

$$P\left(F_{X_1}^{-1}(u_1) \leq x_1, F_{X_2}^{-1}(u_2) \leq x_2\right) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

Derivering av log-likelihood-funktionen

För att underlätta deriveringen av log-likelihood-funktionen, $l(\rho)$, i samband (71) skapas två hjälpfunktioner, $g(\rho)$ och $h(\rho)$,

$$g(\rho) = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \tag{132}$$

$$h(\rho) = \Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right)^2 - 2\rho\Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right) \times$$

$$\Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right) + \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)^2 + \frac{\Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right)^2}{2} + \frac{\Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)^2}{2} \tag{133}$$

vilket medför följande förenkling.

$$l(\rho) = -\frac{T}{2}\ln(1-\rho^2) - \sum_{t=1}^{T} g(\rho) \times h(\rho) \tag{134}$$

Med hjälp av produktregeln är det sedan en rättfram uppgift att bestämma derivatan för log-likelihood-funktionen.[37]

$$l'(\rho) = \frac{T\rho}{(1-\rho^2)} - \sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\rho}{(1-\rho^2)} \times h(\rho) - g(\rho) \times 2\left(\Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right) \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)\right)\right] \tag{135}$$

Genom att förlänga både nämnaren och täljaren i samband (132) med $(1-\rho^2)$ är det sedan möjligt att bryta ut termen $\frac{1}{(1-\rho^2)^2}$ ur summan i samband (135).

$$l'(\rho) = \frac{T\rho}{(1-\rho^2)} - \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \times \sum_{t=1}^{T}[\rho \times \tag{136}$$

$$h(\rho) - (1-\rho^2) \times \Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right) \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)]$$

I nästa steg utvecklas samband (136),

$$l'(\rho) = \frac{T\rho}{(1-\rho^2)} - \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \times \sum_{t=1}^{T}[\rho \times \tag{137}$$

$$\Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right)^2 - 2\rho^2\Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right) \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right) +$$

$$\rho \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)^2 + \rho \times \frac{\Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right)^2}{2} + \rho \times \frac{\Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)^2}{2}$$

$$-(1-\rho^2) \times \Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right) \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)]$$

[37] Om $f(x) = g(x) \times h(x)$ gäller att $f'(x) = g'(x) \times h(x) + g(x) \times h'(x)$.

för att term för term sedan förkortas till följande resultat.[38]

$$l'(\rho) = \frac{\rho T}{(1-\rho^2)} - \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \times \tag{138}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left[\frac{3\rho}{2} \times \Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right)^2 - (1+\rho^2) \times \Phi^{-1}\left(\hat{u}^{(t)}\right) \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right) + \frac{3\rho}{2} \times \Phi^{-1}\left(\hat{v}^{(t)}\right)^2 \right]$$

[38] Där $-2\rho^2 - (1-\rho^2)$ skrivs om som $-(1+\rho^2)$.